

## Силовое воздействие длинных поверхностных волн на полупогруженное в воду тело. I. Влияние формы набегающей волны

О. И. ГУСЕВ<sup>1</sup>, В. С. СКИБА<sup>1,2</sup>, Г. С. ХАКИМЗЯНОВ<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор: Хакимзянов Гаяз Салимович, e-mail: khak@ict.nsc.ru

Поступила 04 мая 2022 г., доработана 02 июня 2022 г., принята в печать 10 июня 2022 г.

В рамках модели потенциальных течений жидкости со свободной границей с использованием разработанного численного алгоритма на подвижных сетках определено влияние формы набегающей волны на величины максимальных заплесков волн на неподвижное полупогруженное тело и силовое воздействие на него. Сравнение проводилось на примере набегающих на тело уединенной и одиночной волн, а также  $N$ -волны с лидирующей волной повышения или понижения. Выявлены отличия в закономерностях взаимодействия с телом длинных волн разных типов. Показано, что наиболее опасными для полупогруженных сооружений являются  $N$ -волны с лидирующей волной понижения.

*Ключевые слова:* уединенная волна, одиночная волна,  $N$ -волна, полупогруженное тело, силовое воздействие поверхностных волн, модель потенциальных течений, подвижная сетка, результаты расчетов.

*Цитирование:* Гусев О.И., Скиба В.С., Хакимзянов Г.С. Силовое воздействие длинных поверхностных волн на полупогруженное в воду тело. I. Влияние формы набегающей волны. Вычислительные технологии. 2022; 27(4):33–62. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.004.

### Введение

При проектировании и эксплуатации полупогруженных в воду неподвижных прибрежных сооружений необходимо учитывать силовое воздействие на них поверхностных волн. Особенно это актуально для тех районов, где возможны катастрофические волны цунами, поэтому исследование задач о взаимодействии поверхностных волн с полупогруженными конструкциями (Wave-Structure Interaction, WSI-задач) ведется с неослабевающей интенсивностью на протяжении многих лет с помощью аналитических методов, лабораторного и численного моделирования.

Отметим, что аналитические решения WSI-задач удается получить лишь для линеаризованных их постановок при условии малости амплитуды набегающей волны [1, 2] и простой геометрии сооружения. Инженерные (основанные на приближенных аналитических решениях и формулах) методы [3] расчета характеристик воздействия волн цунами на объекты, размещенные в береговой зоне, обычно дают завышенную оценку

для силового воздействия [4], а некоторые из методик оказались ошибочными, что выяснилось после Великого восточно-японского цунами 2011 г. [5]. Исследование WSI-задач в лабораторных лотках и бассейнах [6–9] затруднительно из-за необходимости генерации волны нужной формы и перебора в экспериментах значений большого количества определяющих параметров, таких как амплитуда набегающей волны, заглубление полупогруженного объекта, его размеры и многих других. Необходимость анализа большого числа вариантов требует разработки экономичных и достаточно точных численных алгоритмов расчета волновых движений жидкости в окрестности полупогруженных тел [10]. При численном моделировании по сравнению с лабораторным экспериментом упрощается исследование многовариантных ситуаций и результаты исследования могут быть получены в более широких диапазонах перебираемых параметров.

К настоящему времени опубликован ряд работ, в которых исследование взаимодействия волн с плавучими объектами выполнено с помощью численного моделирования [11–14] с применением различных численных методов [15–17] и математических моделей [18, 19]. Отметим, что практически во всех работах, посвященных численному исследованию взаимодействия длинных поверхностных волн с полупогруженными телами, в качестве набегающей на тело волны рассматривалась уединенная волна, при этом результаты исследований предлагалось использовать для оценки воздействия волн цунами на прибереговые конструкции. Однако волны цунами, воздействующие на полупогруженное сооружение, не представляются в виде волн такой простой формы, как уединенная волна. Сложная форма воздействующей на тело волны цунами зависит от множества различных факторов, в том числе и от параметров источника цунами, распределения глубин по трассе распространения, очертаний береговой линии конкретной бухты и многих других. С другой стороны, исследуя мареограммы волн цунами, пришедших в бухту от большого числа источников, можно заметить, что в разные промежутки времени на тело воздействуют волны, похожие на уединенную волну, на  $N$ -волну [20] с лидирующей волной повышения или с лидирующей волной понижения, на одиночную длинную волну положительной полярности и др.

Цель настоящей работы состояла в том, чтобы исследовать, как эти отдельно взятые волны — модельные волны цунами — воздействуют на жестко закрепленную конструкцию, и выявить различия в закономерностях воздействия разных типов волн. Как и в более ранних статьях, здесь исследовано взаимодействие уединенной и одиночной волн с полупогруженной конструкцией, но впервые приводятся результаты моделирования силового воздействия  $N$ -волн. Оказалось, что при накате таких волн возникает более сложная картина взаимодействия, чем в случае уединенной или одиночных волн, и  $N$ -волна с лидирующей волной понижения представляет наибольшую угрозу для прибрежных сооружений.

В настоящей работе для расчета взаимодействия волн различной конфигурации с полупогруженными телами используется численный алгоритм, основанный на математической модели двумерных потенциальных течений идеальной жидкости со свободной границей. Эта модель является одним из звеньев разрабатываемой иерархической цепочки моделей для решения WSI-задач [21, 22]. В случае идеальной жидкости она служит в качестве “эталонной” для обоснования достоверности результатов моделирования в рамках моделей мелкой воды первого и второго длинноволнового приближений [23, 24]. В разд. 1 представлена математическая формулировка рассматриваемой WSI-задачи. Конечно-разностные уравнения и численный алгоритм решения задачи на подвижной сетке, учитывающей неровности дна и днища тела, приведены в разд. 2.

Результаты верификации алгоритма на задаче о воздействии волн различной конфигурации на вертикальную стенку представлены в разд. 3. В последнем разделе приводятся результаты численного исследования силового воздействия модельных волн цунами на полупогруженное тело прямоугольного сечения.

## 1. Постановка задачи о взаимодействии поверхностных волн с неподвижным полупогруженным сооружением

Рассматривается взаимодействие поверхностных волн различной формы с полупогруженным телом, расположенным в бассейне конечной глубины. Для описания плоскопараллельного течения используется декартова система координат  $Oxy$  с осью  $Ox$ , лежащей на невозмущенной свободной границе, и осью  $Oy$ , направленной вертикально вверх (рис. 1). Предполагается, что боковые вертикальные стенки бассейна ( $x = 0$  и  $x = l$ ), его дно, боковые вертикальные грани тела ( $x = x_l$  и  $x = x_r$ ), а также его днище неподвижны и непроницаемы для жидкости. Кроме того, считается, что все точки днища тела всегда находятся в контакте с водой, т. е. при взаимодействии волн с телом полного или частичного осушения его днища не происходит.

### 1.1. Модель потенциальных течений

В модели потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей (FNPF-модели) искомые величины  $\varphi$ ,  $\eta$  удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega(t), \quad (1.1)$$

кинематическому

$$(\eta_t + U\eta_x - V) \Big|_{y=\eta(x,t)} = 0 \quad (1.2)$$

и динамическому

$$\left( \varphi_t + \frac{U^2 + V^2}{2} + g\eta \right) \Big|_{y=\eta(x,t)} = 0 \quad (1.3)$$

условиям на подвижной свободной границе  $y = \eta(x, t)$ , условиям непротекания на вертикальных участках границы области  $\Omega(t)$ , занятой жидкостью, на дне бассейна и днище тела. Если дно бассейна и днище тела заданы однозначными функциями  $y = -h(x)$  и  $y = d(x)$  соответственно, то условия непротекания имеют вид

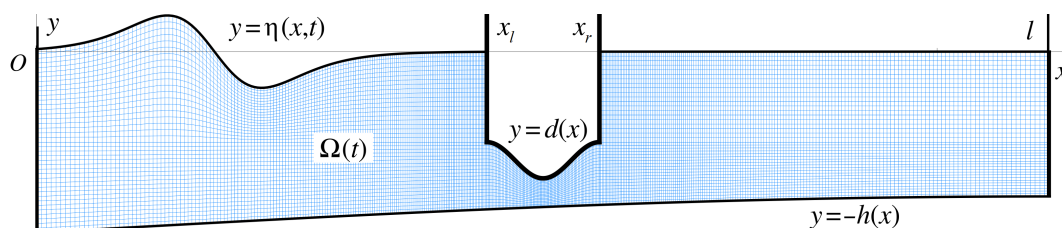


Рис. 1. Схема области течения и расчетная сетка в задаче о взаимодействии поверхностных волн с полупогруженным неподвижным сооружением

Fig. 1. Flow domain and computational grid for the problem of interaction of surface waves with a semi-immersed fixed structure

$$(Uh_x + V) \Big|_{y=-h(x)} = 0, \quad (Ud_x - V) \Big|_{y=d(x)} = 0.$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $\varphi$  — потенциал вектора скорости  $(U, V)$ ,

$$U = \varphi_x, \quad V = \varphi_y, \quad (x, y) \in \Omega(t).$$

Для вычисления давления  $P$  используется интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{P(x, y, t)}{\rho} = - \left( \varphi_t(x, y, t) + \frac{1}{2}U^2(x, y, t) + \frac{1}{2}V^2(x, y, t) + gy \right), \quad (x, y) \in \Omega(t),$$

где  $0 < \rho = \text{const}$  — плотность жидкости. Вектор силы  $\mathbf{F}(t) = (F_1(t), F_2(t))$ , действующей на тело с единичной шириной в направлении, перпендикулярном плоскости  $Oxy$ , вычисляется интегрированием давления вдоль “смоченной” поверхности тела  $S(t)$  [22]:

$$\mathbf{F}(t) = - \iint_{S(t)} P(x, y, t) \mathbf{n}(x, y) dS$$

( $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к боковым граням тела и его днищу). Таким образом, для рассматриваемой здесь формы тела с вертикальными боковыми гранями горизонтальная  $F_1$  и вертикальная  $F_2$  составляющие силы воздействия волн определяются следующими формулами:

$$F_1(t) = \int_{d(x_l)}^{\eta(x_l, t)} P(x_l, y, t) dy - \int_{x_l}^{x_r} (P(x, d(x), t) d'(x)) dx - \int_{d(x_r)}^{\eta(x_r, t)} P(x_r, y, t) dy, \quad (1.4)$$

$$F_2(t) = \int_{x_l}^{x_r} P(x, d(x), t) dx. \quad (1.5)$$

## 1.2. Начальные условия

Волны цунами, пришедшие в бухту и воздействующие на полупогруженное сооружение, имеют сложную форму [25, 26]. Более того, для одного и того же источника генерации волны цунами, приближающиеся к разным участкам побережья, имеют различную форму [27]. Однако зачастую головной участок мареограммы волны цунами бывает похож на мареограмму уединенной волны [28],  $N$ -волны [29, 30], одиночной и других волн простой формы. Поэтому изучение воздействия на прибрежные сооружения и берега таких модельных (“упрощенных”) волн цунами представляет интерес [22, 31, 32].

В настоящей статье в качестве начальных данных

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad V(x, y, 0) = V_0(x, y) \quad (1.6)$$

для FNPF-модели рассматриваются три вида модельных волн цунами в акватории с постоянной глубиной  $h_0 = \text{const}$ : уединенная, одиночная и  $N$ -волны. Потребуем, чтобы начальные данные (1.6) соответствовали безвихревому течению

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial U_0}{\partial y}(x, y) \equiv 0 \quad (1.7)$$

и были согласованы [24] с начальными данными

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.8)$$

для моделей мелкой воды, в которых в качестве скорости берется усредненная по толщине слоя жидкости горизонтальная составляющая вектора скорости FNPF-модели:

$$u_0(x) = \frac{1}{H_0(x)} \int_{-h_0}^{\eta_0(x)} U_0(x, y) dy, \quad H_0(x) = h_0 + \eta_0(x). \quad (1.9)$$

Согласованность начальных данных (1.6), (1.8) дает возможность сопоставления численных результатов, полученных в рамках модели двумерных потенциальных течений и моделей мелкой воды одномерных течений [24], а условие (1.7) позволяет однозначно определить [33] начальные значения для потенциала  $\varphi(x, y, 0)$ .

Если для полностью нелинейной дисперсионной SGN-модели (Serre — Green — Naghdi) второго длинноволнового приближения [23] в качестве начальных данных (1.8) задать уединенную волну

$$\eta_0(x) = a_0 \operatorname{sech}^2(X), \quad X = k(x - x_0), \quad (1.10)$$

$$u_0(x) = c_0 \frac{\eta_0(x)}{H_0(x)}, \quad c_0 = \sqrt{g(a_0 + h_0)}, \quad (1.11)$$

где  $0 < a_0$  — амплитуда волны,  $x = x_0$  — положение ее вершины,

$$k = \frac{1}{h_0} \sqrt{\frac{3a_0}{4(a_0 + h_0)}},$$

то согласованные с ними начальные данные (1.6) для компонент вектора скорости в FNPF-модели выглядят следующим образом [24, 34]:

$$U_0(x, y) = u_0(x) \left[ 1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \frac{(y+h_0)^2}{H_0^2(x)} \right) \frac{H_0(x)(2a_0 - 3\eta_0(x)) + 4(\eta_0(x) - a_0)\eta_0(x)}{h_0(a_0 + h_0)} \right], \quad (1.12)$$

$$V_0(x, y) = \sqrt{3a_0g} \frac{\eta_0(x)}{H_0^2(x)} (y + h_0) \tanh(X), \quad -h_0 \leq y \leq \eta_0(x).$$

Одиночная волна длины  $\lambda > 0$  задается формулами [22]

$$\eta_0(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} (1 + \cos(X)), & |x - x_0| \leq \lambda/2, \\ 0, & |x - x_0| > \lambda/2, \end{cases} \quad X = \frac{2\pi}{\lambda}(x - x_0), \quad (1.13)$$

$$U_0(x, y) = u_0(x) + c_0 \frac{h_0}{H_0(x)} \left( \frac{1}{3} - \frac{(y+h_0)^2}{H_0^2(x)} \right) \frac{H_0(x)(a_0 - 2\eta_0(x)) + 4(\eta_0(x) - a_0)\eta_0(x)}{(\lambda/\pi)^2}, \quad (1.14)$$

$$V_0(x, y) = c_0 \frac{a_0}{H_0^2(x)} \frac{\pi h_0}{\lambda} (y + h_0) \sin(X), \quad -h_0 \leq y \leq \eta_0(x),$$

при этом  $c_0$  и  $u_0(x)$  вычисляются по формулам (1.11). Выражения (1.14) для компонент вектора скорости используются при  $|x - x_0| \leq \lambda/2$ , а при  $|x - x_0| > \lambda/2$ , аналогично формуле (1.13), полагается  $U_0(x, y) \equiv 0$ ,  $V_0(x, y) \equiv 0$ .

Уединенная и одиночная волны имеют положительную полярность.  $N$ -волна [20]

$$\eta_0(x) = \pm a_0 \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2 X \cdot \tanh X, \quad X = \gamma(x - x_0), \quad \gamma = \operatorname{const} > 0, \quad (1.15)$$

состоит из двух полуволн разных полярностей. В формуле (1.15) знак “+” соответствует  $N$ -волне с лидирующей волной повышения (Leading Elevation  $N$ -wave,  $LEN$ -волне), а “-” —  $N$ -волне с лидирующей волной понижения (Leading Depression  $N$ -wave,  $LDN$ -волне). Для  $N$ -волны точка  $x_0$  является центром волны, при этом  $\eta_0(x_0) = 0$ , а наибольшее отклонение  $N$ -волны от невозмущенного уровня будет в двух симметричных относительно  $x_0$  точках

$$x_{01} = x_0 + \frac{1}{2\gamma} \ln(2 - \sqrt{3}) < x_0, \quad x_{02} = x_0 + \frac{1}{2\gamma} \ln(2 + \sqrt{3}) > x_0. \quad (1.16)$$

Координаты (1.16) гребня и подошвы  $N$ -волны определяются уравнением  $\eta'_0(x) = 0$  с учетом того, что

$$\eta'_0(x) = \pm a_0 \gamma \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cosh^4 X} (3 - 2 \cosh^2 X). \quad (1.17)$$

Для FNPF-модели при построении начальных данных (1.6), согласованных с начальными данными (1.11), (1.15) “одномерной”  $N$ -волны, используем следующие формулы [35]:

$$U_0(x, y) = u_0(x) + \left( \frac{H_0^2(x)}{6} - \frac{(h_0 + y)^2}{2} \right) u''_0(x), \quad V_0(x, y) = -(h_0 + y) u'_0(x), \quad (1.18)$$

при этом, как следует из формулы (1.11),

$$u'_0(x) = c_0 h_0 \frac{\eta'_0(x)}{H_0^2(x)}, \quad u''_0(x) = c_0 h_0 \frac{\eta''_0(x) H_0(x) - 2(\eta'_0(x))^2}{H_0^3(x)},$$

где производная  $\eta'_0(x)$  вычисляется по формуле (1.17),

$$\eta''_0(x) = \mp 6\sqrt{3} a_0 \gamma^2 \frac{\sinh X}{\cosh^3 X} \left( \frac{3}{\cosh^2 X} - 1 \right).$$

Таким образом, в настоящей работе используются три вида начальных условий, соответствующих уединенной и  $N$ -волнам бесконечной длины и одиночной волне конечной длины. Легко проверить, что для таких волн компоненты скорости (1.12), (1.14), (1.18) удовлетворяют условиям потенциальности (1.7) и согласованности (1.9).

Для того чтобы иметь возможность оценить влияние формы набегающих волн на процесс их взаимодействия с преградами, будем рассматривать волны одинаковой амплитуды  $a_0$ . Кроме того, сравним воздействие волн различной формы при условии, что они имеют одинаковую крутизну переднего склона, которая может считаться одним из определяющих параметров [36, 37] в задачах наката волн на препятствия.

Для уединенной волны (1.10) крутизна  $s_*$  ее переднего склона определяется однозначно по заданной амплитуде:

$$s_* = \max_{x > x_0} |\eta'_0(x)| = \frac{2a_0}{3h_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_0 + h_0}}. \quad (1.19)$$

Пусть одиночная волна (1.13) имеет такую же крутизну переднего склона:

$$s_* = \max_{x_0 < x < x_0 + \lambda/2} |\eta'_0(x)| = \frac{\pi a_0}{\lambda}.$$

Следовательно, длина  $\lambda$  одиночной волны определяется формулой

$$\lambda = \frac{3}{2} \pi h_0 \sqrt{1 + \frac{h_0}{a_0}}. \quad (1.20)$$

Потребуем, чтобы и  $N$ -волна (1.15) при заданной амплитуде  $a_0$  имела такую же крутизну переднего склона, как уединенная и одиночная волны. Для  $N$ -волны в точке перегиба выполняется равенство  $\cosh^2 X = 3$ , поэтому из (1.17) получаем следующее выражение для крутизны переднего склона  $N$ -волны:

$$s_* = \max_{x > x_{02}} |\eta'_0(x)| = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0 \gamma. \quad (1.21)$$

Приравнивая правые части (1.19) и (1.21), приходим к формуле для коэффициента  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{9h_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_0 + h_0}}.$$

На рис. 2 изображены профили уединенной, одиночной и  $LEN$ -волн одинаковой амплитуды  $a_0/h_0 = 0.2$  и одинаковой крутизны  $s_*$  переднего склона. Для удобства сравнения гребни  $x_0$  уединенной и одиночной волн совмещены с вершиной  $x_{02}$  лидирующей волны повышения  $N$ -волны. Из рисунка видно, что, несмотря на совпадение амплитуд и крутизны переднего склона, форма этих волн различается, а также различаются длины этих волн (табл. 1), поэтому следует ожидать, что количественные характеристики взаимодействия таких волн с преградами также будут различаться.

В табл. 1 приведены некоторые характеристики начальных волн для четырех значений амплитуды. Видно, что крутизна передних склонов волн  $s_*$ , которая вычисляется по формуле (1.19), возрастает при увеличении амплитуды, в то время как длина волн убывает. Длина одиночной волны определяется формулой (1.20). Волны бесконечной длины обычно характеризуются их эффективной длиной  $\lambda_{eff}$ , для подсчета которой

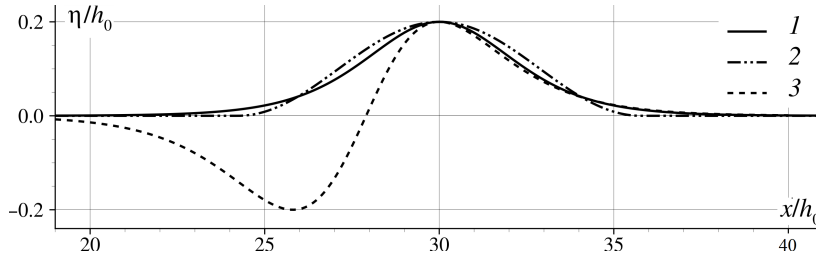


Рис. 2. Графики свободной границы в начальный момент времени для волн различной формы с одинаковыми амплитудой  $a_0/h_0 = 0.2$  и крутизной переднего склона  $s_* = \sqrt{6}/45$ : уединенная волна (1); одиночная волна (2);  $LEN$ -волна (3)

Fig. 2. Graphs of the initial free surface for waves of different shapes with the same amplitude  $a_0/h_0 = 0.2$  and the steepness of the front  $s_* = \sqrt{6}/45$ : solitary wave (1); single wave (2);  $LEN$ -wave (3)

употребляются различные формулы (см., например, [26, 27, 38]). В настоящей работе за эффективную длину уединенной и  $N$ -волн принимается удвоенное расстояние от точки  $x_0$  до точки, в которой абсолютное значение отклонения переднего склона волны от невозмущенного уровня составляет долю  $\Pi$  амплитуды  $a_0$ :

$$\left| \eta_0 \left( x_0 + \frac{\lambda_{eff}}{2} \right) \right| = \Pi a_0. \quad (1.22)$$

Тогда для уединенной волны имеет место следующая формула [39]:

$$\lambda_{eff} = 4h_0 \sqrt{\frac{a_0 + h_0}{3a_0}} \ln \left( \sqrt{\frac{1}{\Pi}} + \sqrt{\frac{1}{\Pi} - 1} \right).$$

В определении (1.22) для  $LEN$ - и  $LDN$ -волн предполагается выполнение неравенства

$$x_0 + \frac{\lambda_{eff}}{2} > x_{02}, \quad (1.23)$$

а из формул (1.15), (1.22) следует, что эффективная длина таких волн определяется положительным корнем уравнения  $f_{Nw}(z) = 0$ , где

$$f_{Nw}(z) = z^3 - z + \frac{2\Pi}{3\sqrt{3}}, \quad z = \tanh \left( \gamma \frac{\lambda_{eff}}{2} \right).$$

При условии  $0 < \Pi < 1$  это уравнение имеет два положительных корня  $z_1$  и  $z_2$ , при этом  $0 < z_1 < \sqrt{3}/3 < z_2 < 1$ . Поскольку неравенство (1.23) равносильно условию

$$\tanh \left[ \gamma \left( x_0 + \frac{\lambda_{eff}}{2} - x_0 \right) \right] > \tanh [\gamma(x_{02} - x_0)] = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

эффективная длина  $N$ -волны определяется бóльшим корнем  $z_2$  на основе равенства

$$\tanh \left( \gamma \frac{\lambda_{eff}}{2} \right) = z_2,$$

которое легко разрешается относительно  $\lambda_{eff}$ :

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 + z_2}{1 - z_2}.$$

Указанные в табл. 1 значения длин волн (эффективных длин уединенной и  $N$ -волн при  $\Pi = 0.05$ ) будут использоваться далее при определении места расположения начальной волны относительно препятствия.

Т а б л и ц а 1. Крутизна переднего склона  $s_*$  и длина  $\lambda$  волн различной формы с амплитудой  $a_0$   
Table 1. The steepness of the front  $s_*$  and the length  $\lambda$  of waves of different shapes with amplitude  $a_0$

$a_0/h_0$	$s_*$	$\lambda/h_0$		
		Уединенная волна	Одиночная волна	$N$ -волна
0.05	0.007	23.053	21.595	31.653
0.10	0.020	16.684	15.629	22.909
0.15	0.036	13.929	13.048	19.125
0.20	0.054	12.322	11.543	16.919



## 2. Численный алгоритм

Для численного решения задачи взаимодействия поверхностных волн с полупогруженным телом использована модификация алгоритма, предложенного в работах [33, 34] для расчета потенциальных течений жидкости со свободной границей в бассейнах с подвижными или неподвижными стенками и фрагментами дна. Эта модификация описана в работах [22, 24] для случая полупогруженного тела прямоугольного сечения, поэтому здесь будут указаны лишь некоторые особенности алгоритма, связанные с более сложной формой днища тела и дна бассейна.

Численный алгоритм ориентирован на использование подвижных сеток, для чего выполняется переход к постановке задачи в подвижной криволинейной системе координат

$$x = x(q^1, q^2, t), \quad y = y(q^1, q^2, t), \quad (2.1)$$

в которой все участки границы области  $\Omega(t)$  лежат на координатных линиях  $q^1 = \text{const}$  или  $q^2 = \text{const}$ . Предполагается, что преобразование координат (2.1) в каждый момент времени  $t$  устанавливает взаимно-однозначное соответствие между физической областью  $\Omega(t)$  и неподвижной вычислительной областью  $Q$  в плоскости переменных  $q^1, q^2$ .

Если днище тела и дно бассейна имеют гладкую форму (см. рис. 1), то в качестве вычислительной области  $Q$  используется единичный квадрат с вырезанным сверху прямоугольником, изображенный на рис. 3, *а*. Боковые стороны  $q^1 = 0$  и  $q^1 = 1$  вычислительной области  $Q$  отображаются при преобразовании (2.1) на боковые вертикальные стенки бассейна  $x = 0$  и  $x = l$ , нижняя сторона  $q^2 = 0$  — на дно бассейна  $y = -h(x)$ , стороны

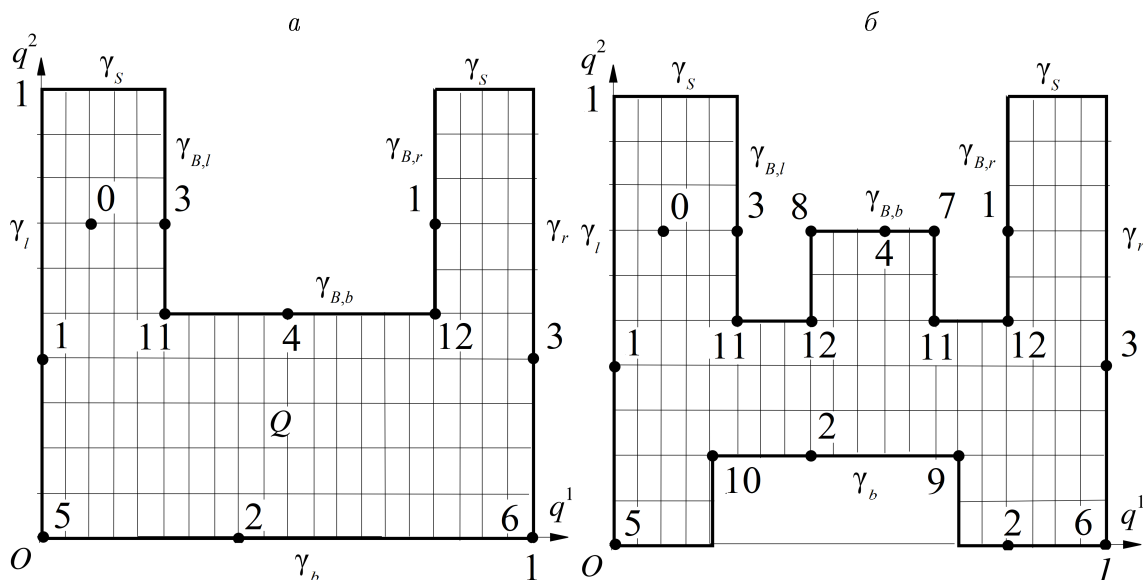


Рис. 3. Вычислительная область  $Q$  и типы узлов сетки в задаче о взаимодействии поверхностных волн с полупогруженным телом при гладкой форме днища тела и дна бассейна (*а*), ступенчатой форме этих фрагментов границы (*б*)

Fig. 3. Computational domain  $Q$  and types of the grid nodes in the problem of interaction of surface waves with a semi-immersed body for smooth shapes of the body and basin bottoms (*a*) and stepped shapes of these boundary fragments (*b*)

$$\gamma_{B,l} = \{\mathbf{q} | q^1 = q_l^1, q_b^2 \leq q^2 \leq 1\}, \quad \gamma_{B,r} = \{\mathbf{q} | q^1 = q_r^1, q_b^2 \leq q^2 \leq 1\},$$

$$\gamma_{B,b} = \{\mathbf{q} | q_l^1 \leq q^1 \leq q_r^1, q^2 = q_b^2\}$$

вырезанного прямоугольника — на вертикальные грани тела  $x = x_l$ ,  $x = x_r$  и его днище  $y = d(x)$  соответственно, где  $\mathbf{q} = (q^1, q^2)$ ,  $0 < q_l^1 < q_r^1 < 1$ ,  $0 < q_b^2 < 1$ . В новых координатах свободная граница является неподвижной и представляет собой множество

$$\gamma_s = \{\mathbf{q} | 0 \leq q^1 \leq q_l^1, q^2 = 1\} \cup \{\mathbf{q} | q_r^1 \leq q^1 \leq 1, q^2 = 1\}$$

— объединение двух отрезков, лежащих на верхней стороне единичного квадрата.

В случае, когда дно имеет ступенчатую форму (например, на дне находится порог или траншея прямоугольной формы, ступенька, уступ), вычислительная область имеет нижнюю границу  $\gamma_b$  в виде ломаной с вертикальными или горизонтальными звеньями. Такую же форму может иметь прообраз  $\gamma_{B,b}$  днища тела (рис. 3, б).

Единичный квадрат в плоскости  $Oq^1q^2$  покрывается прямоугольной сеткой с шагами  $h_1 = 1/N_1$  и  $h_2 = 1/N_2$  в направлении осей  $Oq^1$  и  $Oq^2$  соответственно и узлами  $\mathbf{q}_j$ , где  $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$ ,  $j_1 = 0, \dots, N_1$ ,  $j_2 = 0, \dots, N_2$ . Предполагается, что участки границы  $\gamma_{B,l}$ ,  $\gamma_{B,r}$ , а также  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{B,b}$  (или звенья этих частей границы) лежат на координатных линиях сетки.

Уравнение Лапласа (1.1), кинематическое (1.2) и динамическое (1.3) условия, а также условия непротекания записываются в новой системе координат и аппроксимируются только в тех узлах сетки, которые принадлежат вычислительной области  $Q$ . Так, в новых координатах уравнение Лапласа (1.1) принимает вид уравнения второго порядка эллиптического типа с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) = 0, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (2.2)$$

краевые условия непротекания записываются на соответствующих горизонтальных или вертикальных участках границы вычислительной области (кроме  $\gamma_s$ ):

$$\left( k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) \Big|_{\mathbf{q}=(q^1, q^2=\text{const})} = 0, \quad (2.3)$$

$$\left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) \Big|_{\mathbf{q}=(q^1=\text{const}, q^2)} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$k_{11} = \frac{g_{22}}{J}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{g_{12}}{J}, \quad k_{22} = \frac{g_{11}}{J},$$

$$g_{11} = x_{q^1}^2 + y_{q^1}^2, \quad g_{12} = g_{21} = x_{q^1}x_{q^2} + y_{q^1}y_{q^2}, \quad g_{22} = x_{q^2}^2 + y_{q^2}^2,$$

$J = x_{q^1}y_{q^2} - x_{q^2}y_{q^1} > 0$  — якобиан преобразования (2.1).

Разностные уравнения для потенциала скорости  $\varphi$  получены интегроинтерполяционным методом [33]. Для этого дифференциальное уравнение (2.2) переписывается в интегральном виде

$$\oint_c \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 - \left( k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^1 = 0 \quad (2.5)$$

и для приближенного вычисления интеграла используется квадратурная формула трапеций.

Множество расчетных узлов  $\mathbf{q}_j$ , для которых выписываются разностные аналоги интегральных соотношений (2.5), разбито на непересекающиеся классы, каждому из которых приписан уникальный номер (тип) в зависимости от того, являются узлы из этого класса внутренними или принадлежат определенным частям границы. Узлам расчетной сетки приписывается тип класса, к которому они принадлежат. Внутренним узлам приписан тип 0, граничные узлы, не принадлежащие  $\gamma_s$ , могут иметь тип с 1-го по 12-й в зависимости от того, какой части границы они принадлежат (рис. 3, б). Граничные узлы, не являющиеся угловыми, имеют тип с 1-го по 4-й, тип с 5-го по 8-й имеют граничные узлы, являющиеся вершинами прямых внутренних углов, вершины внутренних углов в  $270^\circ$  имеют тип с 9-го по 12-й. От типа узла зависят контур интегрирования  $\mathcal{C}$  — граница элементарной внутренней или приграничной ячейки и шаблон разностного уравнения в этом узле. Для внутренних узлов (тип 0) шаблон разностного уравнения для потенциала является девятиточечным. В граничных узлах (тип 1–12) шаблон может включать от четырех до восьми узлов сетки.

Для внутренних узлов сетки  $\mathbf{q}_j = (q_{j_1}^1, q_{j_2}^2)$  контуром интегрирования  $\mathcal{C}$  является прямоугольник  $ABCD$  (рис. 4, а), стороны которого параллельны осям координат и делят пополам расстояния до узлов, соседних с  $\mathbf{q}_j$ . Применяя для интегралов по сторонам прямоугольника  $ABCD$  квадратурную формулу трапеций [33], получаем разностное уравнение

$$\left( \sum_{k=0}^8 \alpha_k \varphi_k \right)_j = 0 \tag{2.6}$$

на девятиточечном шаблоне, состоящем из узлов с локальными номерами  $k = 0, \dots, 8$ . Здесь  $\varphi_k$  — значение сеточной функции  $\varphi$  в узле, имеющем локальный номер  $k$ , при этом вместо глобального номера  $(j_1, j_2)$  используется локальный номер  $k = 0$  (рис. 4, а), вместо  $(j_1 - 1, j_2)$  — номер  $k = 1$ , вместо  $(j_1, j_2 - 1)$  — номер  $k = 2$  и т. д. Коэффициенты  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) уравнений (2.6) для внутренних узлов приведены в первой строке табл. 2, где нижние индексы  $A, B, C, D$  указывают центр ячейки (рис. 4, а), в котором вычисляются величины  $\beta^0$  и  $\beta$ . Здесь использованы следующие обозначения:

$$\beta^0 = \frac{h_2}{4h_1} k_{11} - \frac{h_1}{4h_2} k_{22}, \quad \beta = \frac{h_2}{4h_1} k_{11} + \frac{h_1}{4h_2} k_{22} + \frac{1}{2} \sigma k_{12}, \quad \sigma_A = \sigma_C = 1, \quad \sigma_B = \sigma_D = -1.$$

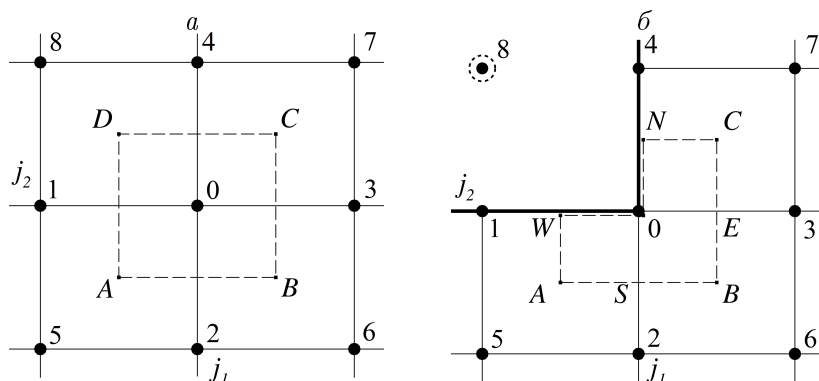


Рис. 4. Контур интегрирования (штриховая линия) и шаблон разностного уравнения (2.6): а — внутренний узел (тип 0); б — граничный узел (тип 12)

Fig. 4. Integration contour (dashed line) and the pattern of difference equation (2.6): а — inner node (type 0); б — boundary node (type 12)

Т а б л и ц а 2. Коэффициенты  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) разностного уравнения (2.6)Table 2. Coefficients  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) of the difference equation (2.6)

Тип узла	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
0	$\beta_A^0 + \beta_D^0$	$-(\beta_A^0 + \beta_B^0)$	$\beta_B^0 + \beta_C^0$	$-(\beta_C^0 + \beta_D^0)$	$\beta_A$	$\beta_B$	$\beta_C$	$\beta_D$
1	0	$-\beta_B^0$	$\beta_B^0 + \beta_C^0$	$-\beta_C^0$	0	$\beta_B$	$\beta_C$	0
2	$\beta_D^0$	0	$\beta_C^0$	$-(\beta_C^0 + \beta_D^0)$	0	0	$\beta_C$	$\beta_D$
3	$\beta_A^0 + \beta_D^0$	$-\beta_A^0$	0	$-\beta_D^0$	$\beta_A$	0	0	$\beta_D$
4	$\beta_A^0$	$-(\beta_A^0 + \beta_B^0)$	$\beta_B^0$	0	$\beta_A$	$\beta_B$	0	0
5	0	0	$\beta_C^0$	$-\beta_C^0$	0	0	$\beta_C$	0
6	$\beta_D^0$	0	0	$-\beta_D^0$	0	0	0	$\beta_D$
7	$\beta_A^0$	$-\beta_A^0$	0	0	$\beta_A$	0	0	0
8	0	$-\beta_B^0$	$\beta_B^0$	0	0	$\beta_B$	0	0
9	$\beta_D^0$	$-\beta_B^0$	$\beta_B^0 + \beta_C^0$	$-(\beta_C^0 + \beta_D^0)$	0	$\beta_B$	$\beta_C$	$\beta_D$
10	$\beta_A^0 + \beta_D^0$	$-\beta_A^0$	$\beta_C^0$	$-(\beta_C^0 + \beta_D^0)$	$\beta_A$	0	$\beta_C$	$\beta_D$
11	$\beta_A^0 + \beta_D^0$	$-(\beta_A^0 + \beta_B^0)$	$\beta_B^0$	$-\beta_D^0$	$\beta_A$	$\beta_B$	0	$\beta_D$
12	$\beta_A^0$	$-(\beta_A^0 + \beta_B^0)$	$\beta_B^0 + \beta_C^0$	$-\beta_C^0$	$\beta_A$	$\beta_B$	$\beta_C$	0

Поскольку сумма первых четырех коэффициентов  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) равна нулю, коэффициент  $\alpha_0$  вычисляется по формуле

$$\alpha_0(\mathbf{q}_j) = - \sum_{k=5}^8 \alpha_k(\mathbf{q}_j).$$

В качестве элементарных ячеек для граничных узлов, не лежащих на прообразе свободной границы, берется та часть прямоугольника  $ABCD$ , которая содержится в вычислительной области  $Q$ . Например, для узла типа 12 элементарной ячейкой будет фигура с границей  $ABCN0W$  (рис. 4, б), фрагменты  $0W$  и  $0N$  которой лежат на прообразе границы погруженного тела. При использовании в (2.5) контура интегрирования  $ABCN0W$  интегралы по сторонам  $0W$  и  $0N$  будут равны нулю в силу краевых условий (2.3), (2.4), поэтому интегральное соотношение (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{(BC)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 - \int_{(AW)} \left( k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^2 + \\ & + \int_{(NC)} \left( k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^1 - \int_{(AB)} \left( k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right) dq^1 = 0, \end{aligned}$$

а его разностный аналог запишется как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ k_{11}(B) \varphi_{q^1}(B) + k_{12}(B) \varphi_{q^2}(B) + k_{11}(C) \varphi_{q^1}(C) + k_{12}(C) \varphi_{q^2}(C) \right] h_2 - \\ & - \left[ k_{11}(A) \varphi_{q^1}(A) + k_{12}(A) \varphi_{q^2}(A) \right] \frac{h_2}{2} + \left[ k_{12}(C) \varphi_{q^1}(C) + k_{22}(C) \varphi_{q^2}(C) \right] \frac{h_1}{2} - \\ & - \frac{1}{2} \left[ k_{12}(A) \varphi_{q^1}(A) + k_{22}(A) \varphi_{q^2}(A) + k_{12}(B) \varphi_{q^1}(B) + k_{22}(B) \varphi_{q^2}(B) \right] h_1 = 0, \end{aligned}$$

где разностные производные в центрах ячеек вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_{q^1}(A) &= \frac{\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_5}{2h_1}, & \varphi_{q^1}(B) &= \frac{\varphi_3 - \varphi_0 + \varphi_6 - \varphi_2}{2h_1}, & \varphi_{q^1}(C) &= \frac{\varphi_7 - \varphi_4 + \varphi_3 - \varphi_0}{2h_1}, \\ \varphi_{q^2}(A) &= \frac{\varphi_0 - \varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_5}{2h_2}, & \varphi_{q^2}(B) &= \frac{\varphi_3 - \varphi_6 + \varphi_0 - \varphi_2}{2h_2}, & \varphi_{q^2}(C) &= \frac{\varphi_7 - \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_0}{2h_2}. \end{aligned}$$

В результате получается разностное уравнение на восьмиточечном шаблоне ( $k = 0, \dots, 7$ ), изображенном на рис. 4, б. Аналогичные восьмиточечные уравнения получаются для узлов типа 9–11.

Интегроинтерполяционный метод используется для получения разностных уравнений во всех других граничных узлах. В узлах типа 1–4 шаблон является шеститочечным, а в угловых (тип 5–8) — четырехточечным. Формально эти уравнения можно записать как девятиточечные (2.6), занулив коэффициенты  $\alpha_k$  для тех узлов девятиточечного шаблона, которые не входят в шаблоны граничных узлов. Например, для узла типа 12 следует положить  $\alpha_8 = 0$ . Выражения для коэффициентов  $\alpha_k$  уравнения (2.6) для внутренних узлов и всех возможных типов граничных узлов расчетной сетки приведены в табл. 2.

Для численного решения задачи взаимодействия поверхностных волн с полупогруженным телом используется такой же алгоритм, как и в случае полупогруженного тела прямоугольного сечения [22, 24]. Пусть при  $t = t^n$  криволинейная сетка  $\mathbf{x}^n$  построена и на ней вычислены значения сеточных функций  $\eta^n$  и  $\varphi^n$ . Вычисление решения  $\eta^{n+1}$ ,  $\varphi^{n+1}$  на  $(n+1)$ -м слое по времени начинается с определения значения потенциала  $\varphi_j^{n+1}$  в сеточных узлах, лежащих на прообразе свободной границы. Для этого используется разностная аппроксимация [33, 34] динамического условия (1.3), записанного в новых координатах. Полученные значения используются в качестве дискретных граничных условий Дирихле для решения с помощью метода последовательной верхней релаксации системы разностных уравнений (2.6) относительно значений  $\varphi_j^{n+1}$  во внутренних узлах области  $Q$  и узлах, принадлежащих прообразам боковых стенок и дна бассейна, днища и граней тела. Далее определяется новое положение свободной границы с использованием аппроксимации на подвижной сетке [33, 34] кинематического условия (1.2). Вычисления на очередном шаге по времени завершаются расчетом новой сетки  $\mathbf{x}_j^{n+1} = (x_j^{n+1}, y_j^{n+1})$ , адаптирующейся к подвижной свободной поверхности и неподвижным фрагментам непроницаемых частей границы. Вид сетки зависит от конкретной решаемой задачи, но общим для всех рассматриваемых задач является использование сетки с неподвижными вертикальными координатными линиями второго семейства, т. е. с неизменными по времени абсциссами узлов:  $\mathbf{x}_j^{n+1} = (x_j, y_j^{n+1})$ . Таким образом, узлы сетки могут двигаться только в вертикальном направлении. При этом в области под телом сетка неподвижная, а в окрестности вертикальных граней тела она может сгущаться в горизонтальном направлении.

### 3. Взаимодействие волн различной формы с вертикальной стенкой

Описанный выше численный алгоритм тестируется на задаче о накате волн различной формы, распространяющихся над горизонтальным дном

$$y = -h_0 = \text{const}, \quad (3.1)$$

на вертикальную непроницаемую стенку, расположенную в правой части бассейна при  $x = l$ . Эта задача имеет не только теоретический интерес, но и важное прикладное значение, поскольку многие прибрежные сооружения содержат вертикальные непроницаемые стенки в качестве конструктивных элементов. В настоящей работе исследован накат на стенку одиночной, уединенной,  $LEN$ - и  $LDN$ -волн с одинаковой крутизной

переднего склона при указанных в табл. 1 значениях амплитуды. Такие значения амплитуды набегающих волн выбраны исходя из реальных данных по месту стоянки одной из проектируемых полупогруженных конструкций, которая располагается в мелководной прибрежной зоне со средней глубиной 40 м, где ожидаемая амплитуда волн цунами, рассчитанная по методике [40], равна 3–4 м. Таким образом, имеет смысл рассматривать модельные волны цунами с относительной амплитудой, не превышающей значения  $a_0/h_0 = 0.1$ . Тем не менее здесь мы рассматриваем воздействие волн и с большим значением амплитуды  $a_0/h_0 = 0.2$ , что соответствует в размерных величинах амплитуде 8 м для уединенной и одиночной волн и высоте 16 м для  $N$ -волн (для равнобедренных  $N$ -волн их высота равна удвоенной амплитуде), нереальной для планируемого места стоянки, но возможной в других случаях. Отметим, что используемый алгоритм позволяет рассчитывать накат на стенку уединенных волн с более высокими значениями амплитуды [22, 33, 34].

В начальный момент времени волны располагались так, что расстояния от стенки до гребней уединенной и одиночной волн, а также до первого локального экстремума  $N$ -волн были для всех волн одинаковыми и равными  $12h_0$ . Таким образом, для уединенной и одиночной волн полагалось  $x_0 = l - 12h_0$ , а для  $N$ -волн —  $x_{02} = l - 12h_0$ , т. е. координата центра  $N$ -волны задавалась (с учетом (1.16)) по формуле

$$x_0 = l - 12h_0 - \frac{1}{2\gamma} \ln(2 + \sqrt{3}).$$

В задаче наката волн на вертикальную стенку вычислительная область  $Q$  является единичным квадратом. В разностных уравнениях (2.6) для потенциала скорости используются узлы типа 0–3, 5, 6 и равномерная в горизонтальном направлении или сгущающаяся с стенке [34] расчетная сетка. Во всех расчетах итерации при решении системы уравнений (2.6) прекращались, когда отклонение в равномерной норме двух последовательных итерационных приближений становилось меньше чем  $\varepsilon = 10^{-7}$ .

Результаты расчетов на последовательностях измельчающихся равномерных сеток (табл. 3, 4) указывают на тенденцию к сходимости численных решений. Для уединенной

Т а б л и ц а 3. Максимальные значения заплесков  $R_w/h_0$  на вертикальную стенку, полученные в расчетах на равномерных сетках с числом узлов  $N_1 \times N_2$

Table 3. Maximum values of runups  $R_w/h_0$  on the vertical wall, obtained in the calculations using the uniform grids with the number of nodes  $N_1 \times N_2$

$a_0/h_0$	$N_1$	$N_2$	$R_w/h_0$			
			Уединенная волна	Одиночная волна	$LEN$ -волна	$LDN$ -волна
0.1	150	5	0.2001	0.2073	0.1789	0.3392
	150	10	0.2031	0.2094	0.1820	0.3447
	300	10	0.2031	0.2095	0.1819	0.3501
	300	20	0.2046	0.2104	0.1836	0.3533
	600	20	0.2045	0.2104	0.1836	0.3561
	600	40	0.2051	0.2107	0.1843	0.3574
0.2	150	5	0.4151	0.4703	0.3474	0.6560
	150	10	0.4224	0.4785	0.3547	0.7033
	300	10	0.4228	0.4787	0.3552	0.8055
	300	20	0.4267	0.4831	0.3595	0.8494
	600	20	0.4269	0.4833	0.3598	0.9683
	600	40	0.4289	0.4854	0.3620	1.0092

Т а б л и ц а 4. Максимальные значения гидродинамической силы воздействия волн  $F^*$  на вертикальную стенку, полученные в расчетах на равномерных сетках с числом узлов  $N_1 \times N_2$   
 Table 4. Maximum values of the wave hydrodynamic force  $F^*$  on the vertical wall, obtained in the calculations using the uniform grids with the number of nodes  $N_1 \times N_2$

$a_0/h_0$	$N_1$	$N_2$	$R_w/h_0$			
			Уединенная волна	Одиночная волна	$LEN$ -волна	$LDN$ -волна
0.1	150	5	0.2056	0.2162	0.1797	0.2688
	150	10	0.2088	0.2190	0.1829	0.2729
	300	10	0.2088	0.2190	0.1829	0.2764
	300	20	0.2105	0.2203	0.1845	0.2783
	600	20	0.2105	0.2202	0.1845	0.2800
	600	40	0.2113	0.2205	0.1851	0.2808
0.2	150	5	0.4274	0.4696	0.3497	0.3609
	150	10	0.4354	0.4782	0.3572	0.3687
	300	10	0.4363	0.4790	0.3583	0.4232
	300	20	0.4405	0.4833	0.3625	0.4275
	600	20	0.4410	0.4836	0.3631	0.4741
	600	40	0.4431	0.4855	0.3653	0.4765

волны максимальный заплеск  $R_w$  на стенку, рассчитанный на мелких сетках, отличается от теоретических значений [41]

$$\frac{R_w}{h_0} = 2\frac{a_0}{h_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{h_0}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{a_0}{h_0}\right)^3$$

не более чем на 0.7 %.

Максимальное значение гидродинамической силы  $F^*$  (табл. 4) определялось как обезразмеренное делением на  $\rho gh_0^2$  максимальное значение изменяющейся со временем гидродинамической силы воздействия волн на вертикальную стенку

$$F(t) = \int_{-h_0}^{\eta(l,t)} P(l, y, t) dy - \frac{1}{2}\rho gh_0^2, \quad (3.2)$$

где

$$P(x, y, t) = P(\mathbf{q}, t) = -\rho \left[ \varphi_t(\mathbf{q}, t) - (Ux_t + Vy_t)(\mathbf{q}, t) + \frac{1}{2}(U^2 + V^2)(\mathbf{q}, t) + gy(\mathbf{q}, t) \right],$$

$$U(\mathbf{q}, t) = \frac{\varphi_{q^1}y_{q^2} - \varphi_{q^2}y_{q^1}}{J}(\mathbf{q}, t), \quad V(\mathbf{q}, t) = \frac{-\varphi_{q^1}x_{q^2} + \varphi_{q^2}x_{q^1}}{J}(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{q} \in Q,$$

$\mathbf{q}$  — прообраз точки  $(x, y)$  при преобразовании (2.1) в момент времени  $t$ . Для уединенной волны отличие расчетных значений  $F^*$  от экспериментальных данных [42], которые аппроксимируются зависимостью

$$\frac{F^*}{\rho gh_0^2} = -1.61 \left(\frac{a_0}{h_0}\right)^2 + 2.79 \frac{a_0}{h_0},$$

составляет не более 20 %.

Анализ результатов, приведенных в табл. 3, 4, показывает, что максимальные значения заплесков при накате на стенку  $LDN$ -волн существенно отличаются от значений таких величин для других форм набегающих волн. Для гидродинамических сил отличие не столь существенное. Отличаются также и процессы взаимодействия со стенкой волн различной формы. Одиночная и уединенная волны взаимодействуют со стенкой примерно одинаковым образом в процессе наката и с образованием при откате от стенки одной отчетливо выраженной отраженной волны. Картина взаимодействия  $N$ -волн гораздо сложнее, для них характерны наличие нескольких заплесков на стенку и возникновение нескольких отраженных волн.

При накате  $LEN$ -волн максимумы заплесков на стенку меньше соответствующих значений для уединенных волн рассмотренных амплитуд (рис. 5, *а, б*). После достижения максимума следует понижение уровня воды на стенке до отрицательного значения, меньшего уровня  $y = -a_0$  в подошве начальной  $LEN$ -волны. Далее возникают колебательные движения точки уреза (точки пересечения свободной границы с вертикальной стенкой) с уменьшающимися амплитудами, но с большим размахом, чем в случае одиночной волны. В случае  $LDN$ -волн уровень свободной поверхности на стенке вначале понижается, а затем происходит резкое движение точки уреза вверх. При этом для

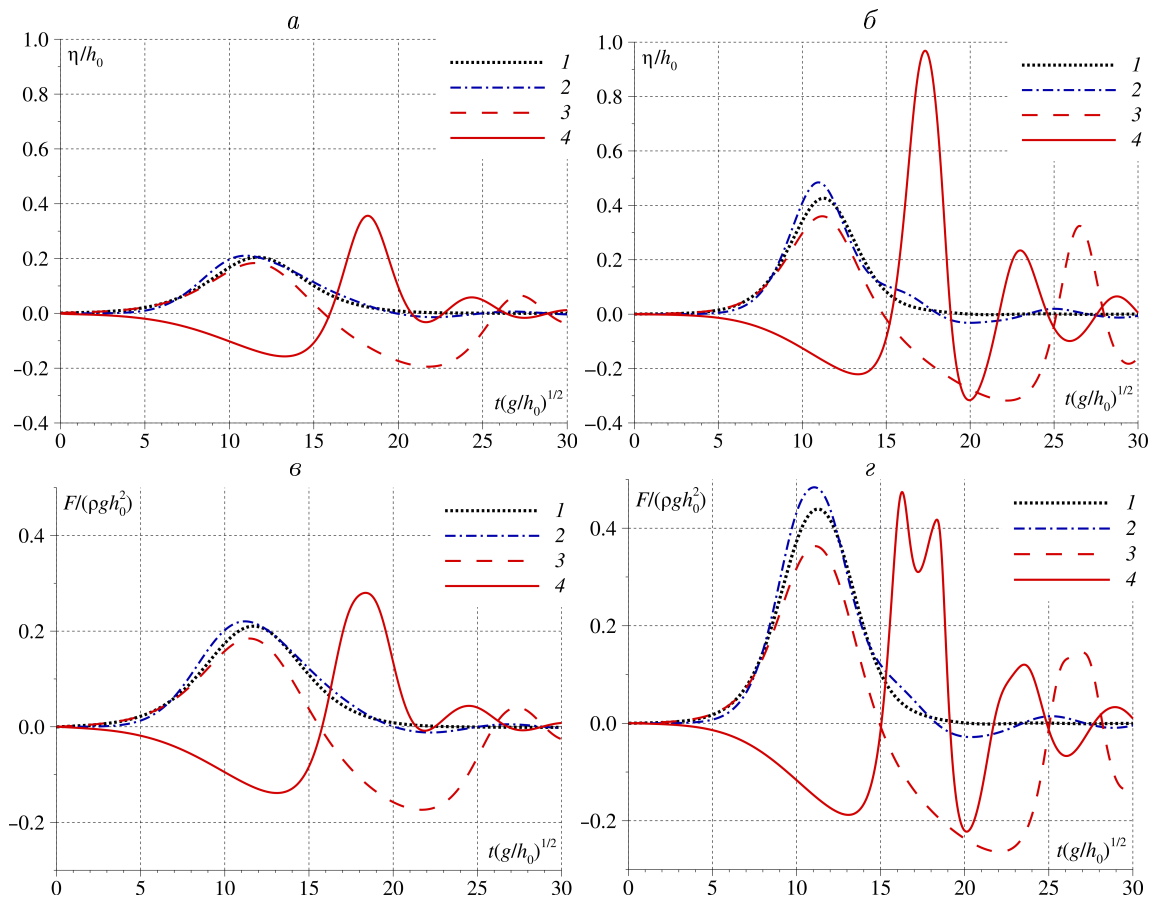


Рис. 5. Хронограммы точки уреза (*а, б*) и гидродинамической силы (*в, г*), действующей на вертикальную стенку при набегании на нее уединенной волны (1), одиночной (2),  $N$ -волн с лидирующими волнами повышения (3) и понижения (4) при  $a_0/h_0 = 0.1$  (*а, в*) и  $0.2$  (*б, г*)

Fig. 5. Chronograms of the cut-off point (*a, б*) and hydrodynamic force (*в, г*) acting on the vertical wall for the solitary wave (1), single wave (2) and  $N$ -waves with leading elevation (3) and depression (4) parts. Initial wave amplitude  $a_0/h_0 = 0.1$  (*a, в*) and  $0.2$  (*б, г*)



$LDN$ -волн максимальные значения заплесков значительно превосходят максимумы заплесков для волн других конфигураций. Например, при  $a_0/h_0 = 0.2$  максимальный заплеск  $R_w/h_0$  превосходит исходную амплитуду почти в 5 раз (для  $a_0/h_0 = 0.1$  более чем в 3 раза).

Хронограммы силового воздействия  $N$ -волн на стенку имеют более сложный вид, чем для других форм набегающих волн (рис. 5, в, з). Для  $LEN$ -волн максимумы силы меньше, чем для других волн такой же амплитуды и крутизны переднего склона. При амплитуде  $a_0/h_0 = 0.1$  максимальное силовое воздействие на стенку оказывает  $LDN$ -волна, однако при  $a_0/h_0 = 0.2$  оно становится меньше, чем воздействие одиночной волны, несмотря на то что заплеск последней существенно меньше заплеска  $LDN$ -волны.

Интересной особенностью хронограммы гидродинамической силы воздействия  $LDN$ -волны на стенку при амплитуде  $a_0/h_0 = 0.2$  является ее двухпиковость (рис. 5, з). Видно, что первый пик появляется перед максимальным заплеском на стенку (рис. 5, б), а второй — после него, причем второе пиковое значение меньше первого. Для уединенной волны эффект двухпиковости давления в основании стенки или силы воздействия на нее известен давно, и он проявляется только для волн с относительно большой амплитудой ( $a_0/h_0 \geq 0.4$ ), что подтверждается лабораторными исследованиями [42–44] и численными расчетами [45–49].

В работе [45] впервые указано, что двухпиковость гидродинамической силы может быть связана с немонотонным характером изменения ускорения частиц жидкости при их движении вдоль вертикальной стенки. Позже эта же гипотеза была выдвинута и в других работах [42, 46, 47]. В работе [46] установлено, что при накате на стенку уединенной волны большой амплитуды возникает сравнительно тонкая струя воды, движущаяся вверх вдоль стенки. После достижения максимальной высоты верхняя часть струи начинает почти свободное падение вниз, т.е. падает с ускорением, близким к ускорению свободного падения. В экспериментах [50] замечено, что такая струя фактически рассыпалась на отдельные капли, как при свободном падении. Возможно, что такое поведение струи является причиной уменьшения силового воздействия на стенку в небольшом промежутке времени между моментами локальных максимумов гидродинамической силы.

Видимо, аналогичная связь между гидродинамической силой воздействия на стенку и ускорением частиц жидкости, движущихся вдоль стенки, имеет место и для  $LDN$ -волн, но двухпиковость хронограмм силы возникает (см. линию 4 на рис. 5, з) при меньших значениях амплитуды, чем для уединенной волны. На рис. 6 изображены хро-

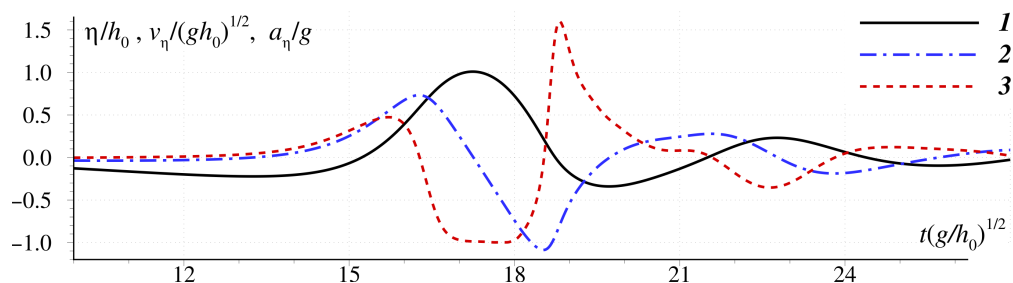


Рис. 6. Хронограммы точки уреза  $\eta/h_0$  (1), ее скорости  $\eta_t/\sqrt{gh_0}$  (2) и ускорения  $a_\eta/g$  (3) при набегании на стенку  $LDN$ -волны с амплитудой  $a_0/h_0 = 0.2$

Fig. 6. Chronograms of the cut-off point  $\eta/h_0$  (1), its velocity  $\eta_t/\sqrt{gh_0}$  (2) and the acceleration  $a_\eta/g$  (3), when the  $LDN$ -wave with the amplitude  $a_0/h_0 = 0.2$  impacts the wall

нограммы точки уреза  $\eta(l, t)$ , ее скорости  $v_\eta = \eta_t(l, t)$  и ускорения  $a_\eta = \eta_{tt}(l, t)$  при набегании на стенку LDN-волны с относительной амплитудой  $a_0/h_0 = 0.2$ . Видно, что хронограмма ускорения (линия 3 на рис. 6) имеет два локальных максимума в окрестности момента  $t_0$  максимального заплеска, причем, как и для гидродинамической силы (линия 4 на рис. 5, з), первый максимум наступает раньше  $t_0$ , а второй — позже. Отличием хронограммы ускорения от хронограммы силы является превышение второго максимума над первым. Кроме того, хронограммы ускорения имеют локальный минимум примерно в тот же момент времени, когда происходит максимальный заплеск, после которого точка уреза движется некоторое время вниз с ускорением, почти равным ускорению свободного падения:  $a_\eta \approx -g$ .

### 3.1. Связь ускорения точки уреза с силовым воздействием волн на вертикальную стенку

Результаты расчетов показали, что гидродинамическая сила воздействия волн на вертикальную стенку связана с ускорением точки уреза. Для модели потенциальных течений установить такую связь в виде аналитической формулы не удастся. Однако это можно сделать в рамках SGN-модели, уравнения которой в случае горизонтального дна (3.1) имеют вид

$$H_t + (Hu)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{1}{H}p_x = 0, \quad p(x, t) = \int_{-h_0}^{\eta(x,t)} P_{\text{SGN}}(x, y, t) dy, \quad (3.3)$$

где  $H(x, t) = h_0 + \eta(x, t)$  — полная глубина,  $u(x, t)$  — средняя по толщине жидкого слоя скорость,  $P_{\text{SGN}}$  — давление в SGN-модели,

$$P_{\text{SGN}}(x, y, t) = \rho g(H(x, t) - (y + h_0)) - \rho \left( \frac{H^2(x, t)}{2} - \frac{(y + h_0)^2}{2} \right) R_1(x, t), \quad (3.4)$$

$R_1 = u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2$ . Определяя гидродинамическую силу  $F_{\text{SGN}}$  воздействия волн на вертикальную стенку в рамках SGN-модели по той же формуле (3.2), что и для FNPF-модели, получаем выражение

$$F_{\text{SGN}}(t) = \rho g \frac{H^2}{2} - \rho \frac{H^3}{3} R_1 - \frac{1}{2} \rho g h_0^2.$$

Из уравнения неразрывности (первое уравнение в (3.3)) следует, что

$$R_1 = -\frac{1}{H} (H_{tt} + u_t H_x + u H_{xt} + u (H u_x)_x).$$

На вертикальной стенке из условия непротекания  $u = 0$  и его следствия  $u_t = 0$  получаем формулу

$$F_{\text{SGN}}(t) = \rho g \frac{H^2}{2} + \rho \frac{H^2}{3} \eta_{tt} - \frac{1}{2} \rho g h_0^2 = \rho \frac{(h_0 + \eta)^2}{2} \left( g + \frac{2}{3} a_\eta \right) - \frac{1}{2} \rho g h_0^2, \quad (3.5)$$

где  $a_\eta = \eta_{tt}$  — ускорение точки уреза. Из этой формулы видно, что гидродинамическая сила воздействия волн на вертикальную стенку зависит не только от возвышения свободной границы  $\eta$ , но и от ускорения  $a_\eta$  точки уреза.

Возможность возникновения двухпиковой конфигурации гидродинамической силы зависит от того, может ли функция (3.5) иметь более одного экстремума в окрестности  $t_0$  — момента максимального заплеска. Теоретические оценки показывают, что при определенной связи между возвышением свободной границы на стенке, скоростью движения точки уреза и ее ускорением в хронограмме гидродинамической силы возникают два локальных максимума и один локальный минимум, причем последний достигается при  $t = t_0$ . Поскольку давление (3.4) в SGN-модели в случае длинных волн достаточно хорошо [48] воспроизводит давление  $P$  модели потенциальных течений, можно предположить, что и силовые воздействия (3.2), (3.5), определяемые в рамках этих моделей, будут близки. Поэтому объяснение причин возникновения двухпиковости хронограмм силы воздействия волн на вертикальную стенку в рамках SGN-модели может быть применено и при интерпретации результатов расчетов на основе FNPF-модели.

#### 4. Результаты численного моделирования силового воздействия волн различной конфигурации на полупогруженное тело

В настоящем разделе приведены некоторые результаты численного моделирования взаимодействия волн различной формы, распространяющихся над горизонтальным дном (3.1), с неподвижным полупогруженным сооружением прямоугольной формы, имеющим горизонтальное днище  $d(x) = d = \text{const} < 0$ . В начальный момент времени волны разной формы располагаются слева от тела так, что расстояния от его лицевой грани до гребней уединенной и одиночной волн, а также до ближнего к телу локального экстремума  $N$ -волн одинаковы и равны  $12h_0$ . Вычислительная область  $Q$  представляет собой единичный квадрат с вырезанным сверху прямоугольником (см. рис. 3, *a*). В разностных уравнениях (2.6) для потенциала скорости используются узлы типа 0–3, 5, 6, 11, 12 и равномерная в горизонтальном направлении или сгущающаяся к граням тела расчетная сетка. Значения горизонтальной и вертикальной составляющих гидродинамической силы воздействия волн на тело рассматриваемой здесь формы определяются на основе формул (1.4), (1.5):

$$F_1(t) = \int_d^{\eta(x_l, t)} P(x_l, y, t) dy - \int_d^{\eta(x_r, t)} P(x_r, y, t) dy, \quad F_2(t) = \int_{x_l}^{x_r} P(x, d, t) dx + \rho g d L,$$

где  $|\rho g d L|$  — сила Архимеда, действующая на тело в покоящейся жидкости.

Расчеты выполнены для разных значений амплитуды  $a_0$  набегающих волн, заглубления  $d$  и длины тела  $L = x_r - x_l$ . Ниже представлены некоторые из полученных результатов. На рис. 7, *a* изображены графики колебаний точки уреза на левой грани тела.  $LDN$ -волна создает наибольший заплеск на эту грань, несколько меньший, чем при накате на вертикальную стенку. Также меньшими получаются значения горизонтальной составляющей силы воздействия волн на тело (рис. 7, *b*), а различия в максимумах сил между  $LDN$ -волной и волнами других типов больше, чем в случае вертикальной стенки, но при указанном заглублении хронограмма горизонтальной составляющей силы, действующей на тело при накате  $LDN$ -волны, не является двухпиковой. Отметим, что для волн всех типов размах колебаний точки уреза на правой грани существенно меньше, чем на левой. Кроме того, прошедшая за тело волна сохраняет свою форму. Так, в случае начальной  $LDN$ -волны за телом формируется также  $LDN$ -волна.

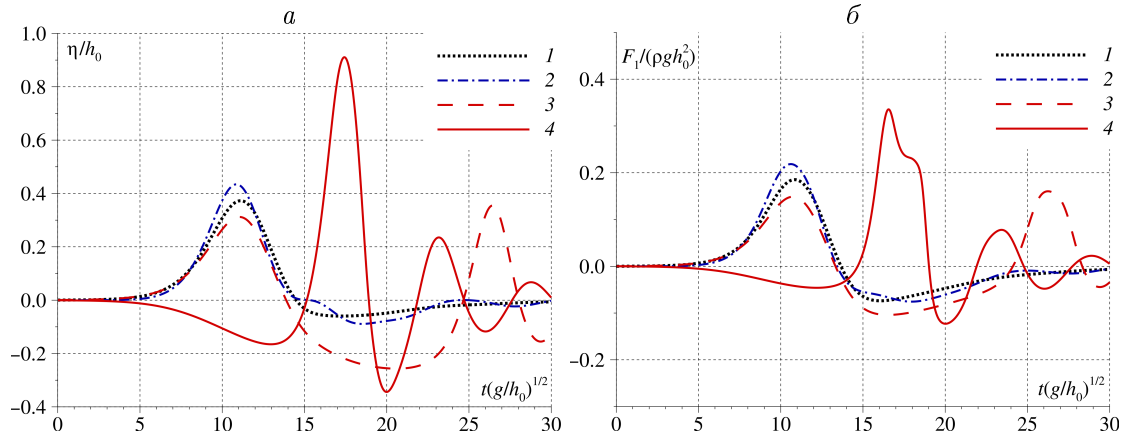


Рис. 7. Хронограммы точки уреза (а) и горизонтальной составляющей гидродинамической силы (б), действующей на тело, при набегании на него уединенной (1), одиночной (2), *LEN*- и *LDN*-волн (кривые 3 и 4 соответственно);  $a_0/h_0 = 0.2$ ,  $L/h_0 = 5$ ,  $d/h_0 = -0.5$

Fig. 7. Chronograms of the cut-off point (a) and the horizontal component of the hydrodynamic force (b) acting on the body, when the solitary (1), single (2), *LEN*- and *LDN*-waves (curves 3 and 4 respectively) impact it;  $a_0/h_0 = 0.2$ ,  $L/h_0 = 5$ ,  $d/h_0 = -0.5$

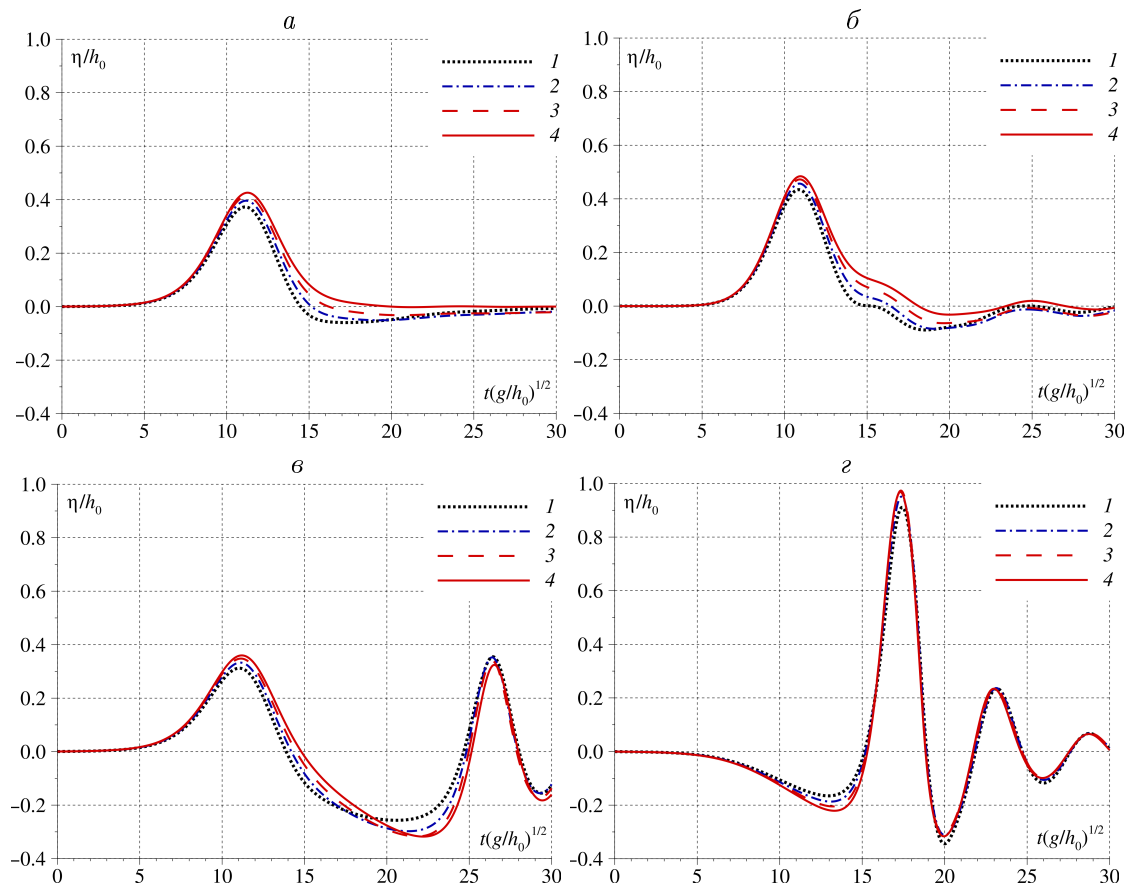


Рис. 8. Хронограммы точки уреза при набегании уединенной (а), одиночной (б), *LEN*- и *LDN*-волн (в и г соответственно) на тело с заглублением  $d/h_0 = -0.5$ ,  $-0.75$ ,  $-0.9$  (кривые 1–3 соответственно); на вертикальную стенку (4);  $a_0/h_0 = 0.2$ ,  $L/h_0 = 5$

Fig. 8. Chronograms of the cut-off point when the solitary (a), single (б), *LEN*- and *LDN*-waves (в and г respectively) impact the body with the submergence  $d/h_0 = -0.5$ ,  $-0.75$ ,  $-0.9$  (curves 1–3 respectively); the vertical wall (4);  $a_0/h_0 = 0.2$ ,  $L/h_0 = 5$

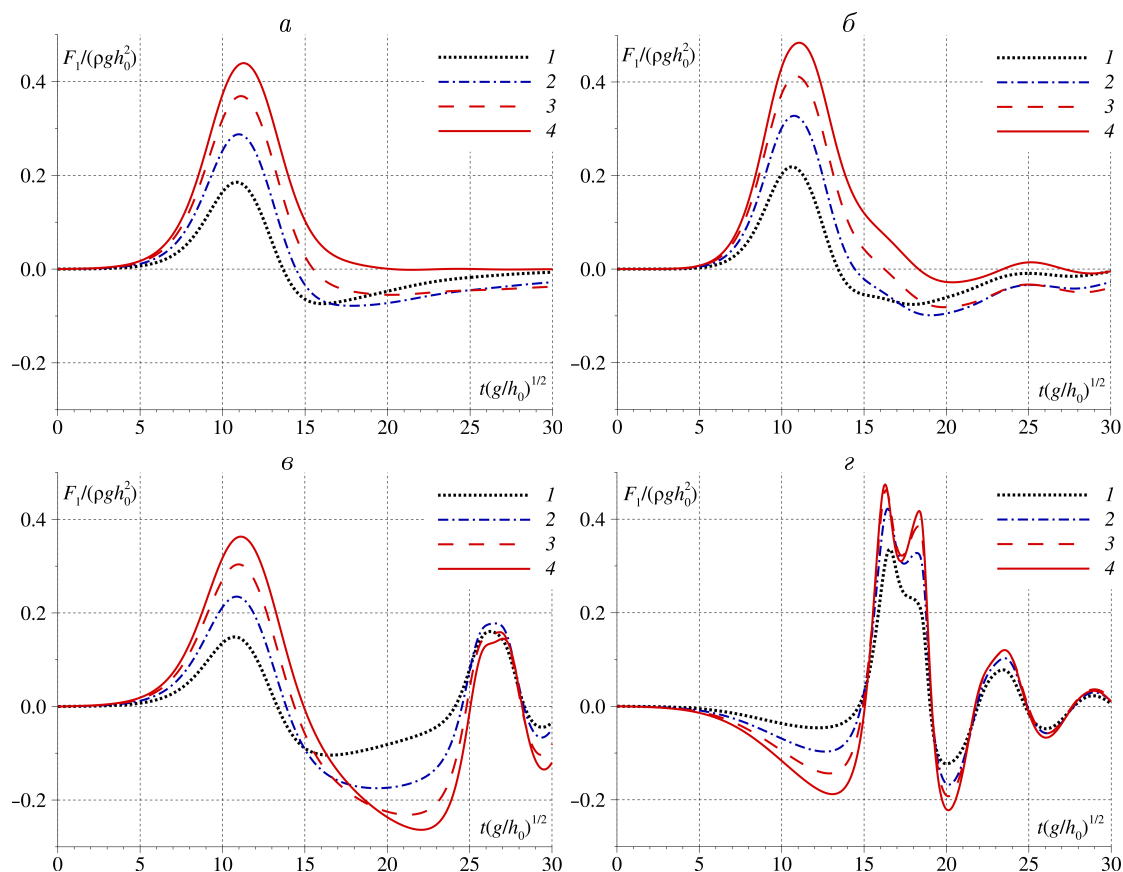


Рис. 9. Хронограммы горизонтальной составляющей гидродинамической силы при набегании уединенной (*а*), одиночной (*б*), *LEN*- и *LDN*-волн (*в* и *г* соответственно) на тело с заглублением  $d/h_0 = -0.5, -0.75, -0.9$  (кривые 1–3 соответственно); на вертикальную стенку (4);  $a_0/h_0 = 0.2, L/h_0 = 5$

Fig. 9. Chronograms of the horizontal component of the hydrodynamic force when solitary (*a*), single (*б*), *LEN*- and *LDN*-waves (*в* and *г* respectively) impact the body with the submergence  $d/h_0 = -0.5, -0.75, -0.9$  (curves 1–3 respectively); the vertical wall (4);  $a_0/h_0 = 0.2, L/h_0 = 5$

На рис. 8, 9 демонстрируется влияние заглубления тела на амплитудные и силовые характеристики взаимодействия с ним волн разной формы. Видно, что для всех типов волн хронограммы точки уреза на левой грани тела приближаются при увеличении  $|d|$  к хронограммам для случая взаимодействия волн с вертикальной стенкой (см. рис. 8), при этом рост заглубления  $|d|$  приводит к монотонному возрастанию максимальных заплесков при первом накате на тело. Вид хронограмм различается для волн разных форм: для уединенной, одиночной и *LDN*-волн хронограммы при первом взаимодействии с телом имеют один глобальный максимум (см. рис. 8, *а*, *б*, *г*), а для *LEN*-волны — два сравнимых максимума, один из которых возникает при взаимодействии с телом лидирующей волны повышения, а второй — при более позднем накате волны отрицательной полярности (см. рис. 8, *в*). При накате *LDN*-волн (см. рис. 8, *г*) значения максимальных заплесков на левую грань тела в несколько раз превышают значения заплесков уединенной, одиночной и *LEN*-волн при любых значениях заглубления, так как выросший при накате лидирующей волны понижения уровень воды на левой грани тела продолжает увеличиваться при накате следующей волны — волны повышения. При взаимодействии *N*-волн с полупогруженным телом имеет место бóльший размах колебаний точки уреза

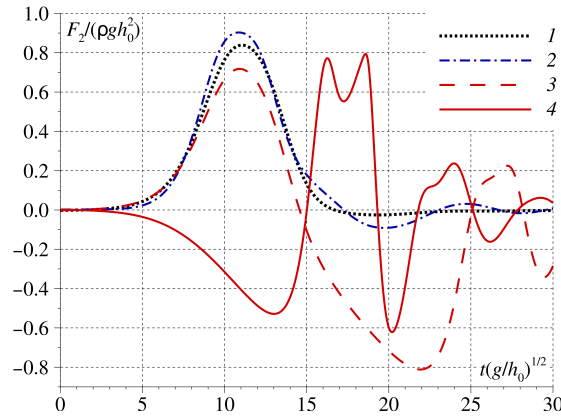


Рис. 10. Хронограммы вертикальной составляющей гидродинамической силы при набегании на тело уединенной (1), одиночной (2), *LEN*- и *LDN*-волн (кривые 3 и 4 соответственно);  $d/h_0 = -0.5$ ,  $a_0/h_0 = 0.2$ ,  $L/h_0 = 5$

Fig. 10. Chronograms of the vertical component of the hydrodynamic force when the solitary (1), single (2), *LEN*- and *LDN*-waves (curves 3 and 4 respectively) impact the body;  $d/h_0 = -0.5$ ,  $a_0/h_0 = 0.2$ ,  $L/h_0 = 5$

на левой грани, чем в случаях уединенной и одиночной волн. При их первом взаимодействии абсолютные значения максимумов понижения уровня воды увеличиваются с ростом заглубления в случае *N*-волн, но уменьшаются для уединенной и одиночной волн.

Горизонтальная составляющая гидродинамической силы воздействия волн на тело существенно зависит от заглубления (см. рис. 9). Это обусловлено тем, что с ростом заглубления  $|d|$  заплески на левую грань тела увеличиваются, а на правую — уменьшаются, т. е. растет перепад уровня воды на противоположных гранях. Для всех типов волн при увеличении заглубления хронограммы силового воздействия на тело приближаются к хронограммам силового воздействия на вертикальную стенку. Отличительной особенностью хронограмм силы для *LEN*-волны является сильная зависимость первого максимума от заглубления тела и слабая — для второго (см. рис. 9, в), который превосходит второй максимум при накате *LEN*-волны на вертикальную стенку. Можно видеть, что с ростом заглубления хронограмма гидродинамической силы воздействия *N*-волны с лидирующей волной понижения (см. рис. 9, з) становится двухпиковой, чего не наблюдается для прочих видов волн.

На рис. 10 изображены хронограммы вертикальной составляющей  $F_2(t)$  гидродинамической силы, действующей на тело. Видно, что максимальные положительные и отрицательные значения вертикальной составляющей силы существенно превосходят экстремальные значения горизонтальной составляющей  $F_1(t)$ . Отметим, что хронограммы вертикальной составляющей силы в случае *N*-волны с лидирующей волной понижения принимают двухпиковую конфигурацию при меньших значениях заглубления, чем хронограммы горизонтальной составляющей и, в отличие от последней, второй пик силы  $F_2(t)$  больше первого.

Отметим, что влияние длины тела на характеристики взаимодействия с ним волн разной формы аналогично влиянию заглубления: при фиксированном заглублении увеличение длины тела качественно приводит к тем же эффектам, что и увеличение заглубления при фиксированной длине тела.

## Заключение

В работе выполнено сравнение характеристик взаимодействия поверхностных волн разной формы с неподвижным полупогруженным в воду сооружением. Для описания течения жидкости применена математическая модель потенциальных течений идеальной жидкости со свободной границей. Численный алгоритм основан на использовании криволинейных сеток, адаптирующихся к подвижной свободной границе и к поверхности полупогруженного тела. Представленные результаты получены для случая горизонтального дна и тела с вертикальными боковыми гранями и горизонтальным днищем.

По совокупности проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы о характере взаимодействия волн разных типов с полупогруженными в воду конструкциями:

- для  $N$ -волн с лидирующей волной понижения максимальные значения заплесков налицевую грань тела значительно превосходят максимумы заплесков для волн иных конфигураций;
- воздействия одиночных и уединенных волн на погруженные в воду конструкции схожи между собой;
- прошедшая за тело волна имеет меньшую амплитуду, чем набегающая, но сохраняет свою форму для всех типов волн;
- при увеличении заглубления горизонтальная составляющая гидродинамической силы приближается к воздействию волн на вертикальную неподвижную стенку;
- при росте заглубления тела и его длины максимальные заплески налицевую грань тела и горизонтальная составляющая гидродинамической силы воздействия увеличиваются, а заплески на тыльную грань уменьшаются;
- в отличие от уединенной и одиночной волн, хронограммы горизонтальной и вертикальной компонент гидродинамической силы воздействия на тело  $N$ -волн с лидирующей волной понижения содержат участок с двухпиковой конфигурацией даже при сравнительно низких значениях амплитуды.

Выводы, относящиеся к уединенной волне, полностью согласуются с известными данными лабораторных экспериментов [8, 51], результатами расчетов других авторов [17–19, 38, 52], использовавших для своих исследований как модель потенциальных течений, так и другие математические модели, а также с аналитическими решениями [1]. Для одиночных волн полученные результаты не противоречат выводам работы [22]. Для  $N$ -волн результаты являются новыми, поэтому в настоящее время не представляется возможным выполнить сопоставление с результатами исследований других авторов.

В ближайшей перспективе результаты настоящей работы будут использованы для изучения влияния вертикальной стенки, расположенной за полупогруженной в воду конструкцией, на силовое воздействие поверхностных волн различной формы, а также влияние на такое воздействие неровностей дна бассейна и днища конструкции.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ФИЦ ИВТ, разд. 2 и 3.1 выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-00127).

## Список литературы

- [1] **Fang Q., Guo A.** Analytical and experimental study of focused wave action on a partially immersed box. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019: Article ID 9850302. DOI:10.1155/2019/9850302.
- [2] **Zheng S., Zhang Y.** Wave diffraction from a truncated cylinder in front of a vertical wall. *Ocean Engineering*. 2015; (104):329–343.
- [3] **Дорфман А.А., Печенин С.А., Семенов К.К., Нуднер И.С., Максимов В.В.** Воздействие волны цунами на морские гидротехнические сооружения и береговые объекты. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2017; 10(4):16–30.
- [4] **Lloyd T.O., Rossetto T.** A comparison between existing tsunami load guidance and large-scale experiments with long-waves. *Proceedings of 15th World Conference on Earthquake Engineering (15WCEE)*. 2012; (8):6412–6421.
- [5] **Yeh H., Barbosa A.R., Ko H., Cawley J.G.** Tsunami loadings on structures: review and analysis. *Coastal Engineering Proceedings*. 2014; 1(34):Paper 4.
- [6] **Камынин Е.Ю., Максимов В.В., Нуднер И.С., Семенов К.К., Хакимзянов Г.С.** Исследование взаимодействия уединенной волны с частично погруженным неподвижным сооружением. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2010; 4(10):39–54.
- [7] **Нуднер И.С., Семенов К.К., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю.** Исследование взаимодействия длинных морских волн с сооружениями, защищенными вертикальными экранами. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2017; 10(4):31–43.
- [8] **Chen Y.-H., Wang K.-H.** Experiments and computations of solitary wave interaction with fixed, partially submerged, vertical cylinders. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2019; 5(2):189–204.
- [9] **Hadzic I., Hennig J., Peric M., Xing-Kaeding Y.** Computation of flow induced motion of floating bodies. *Applied Mathematical Modelling*. 2005; 29(12):1196–1210.
- [10] **Нуднер И.С., Семенов К.К., Лебедев В.В., Хакимзянов Г.С., Захаров Ю.Н.** Численная модель гидроволновой лаборатории для исследования взаимодействия морских волн с гидротехническими сооружениями. *Вычислительные технологии*. 2019; 24(1):86–105. DOI:10.25743/ICT.2019.24.1.007.
- [11] **Isaacson M.** Nonlinear-wave effects on fixed and floating bodies. *Journal of Fluid Mechanics*. 1982; (120):267–281.
- [12] **Khakimzyanov G.S.** Numerical simulation of the interaction of a solitary wave with a partially immersed body. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2002; 17(2):145–158.
- [13] **Zhao M., Cheng L., Teng B.** Numerical simulation of solitary wave scattering by a circular cylinder array. *Ocean Engineering*. 2007; 34(3–4):489–499.
- [14] **Zhou B.Z., Wu G.X., Meng Q.C.** Interactions of fully nonlinear solitary wave with a freely floating vertical cylinder. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016; (96):119–131.
- [15] **Афанасьев К.Е., Березин Е.Н.** Анализ динамических характеристик при взаимодействии уединенной волны с препятствием. *Вычислительные технологии*. 2004; 9(3):22–38.
- [16] **Yan S., Ma Q.W.** Numerical simulation of fully nonlinear interaction between steep waves and 2D floating bodies using the QALE-FEM method. *Journal of Computational Physics*. 2007; (221):666–692.



- [17] **Chang C.-H.** Study of a solitary wave interacting with a surface piercing square cylinder using a three-dimensional fully nonlinear model with grid-refinement technique on surface layers. *Journal of Marine Engineering & Technology*. 2017; 16(1):22–36.
- [18] **Lin P.** A multiple-layer  $\sigma$ -coordinate model for simulation of wave–structure interaction. *Computers & Fluids*. 2006; 35(2):147–167.
- [19] **Orzech M.D., Shi F., Veeramony J., Bateman S., Cal A.J., Kirby J.T.** Incorporating floating surface objects into a fully dispersive surface wave model. *Ocean Modelling*. 2016; (102):14–26.
- [20] **Tadepalli S., Synolakis C.E.** The run-up of N-waves on sloping beaches. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*. 1994; (445):99–112.
- [21] **Khakimzyanov G.S., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part I: Mathematical models. *Communications in Computational Physics*. 2020; 27(2):321–378.
- [22] **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: long waves over a flat bottom. *Ocean Engineering*. 2021; (221):Article 108540.
- [23] **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. *Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing*. Basel: Birkhauser; 2020: 284.
- [24] **Khakimzyanov G.S., Dutykh D., Gusev O.I.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part II: Numerical results. arXiv:2204.08210v1. 2022. DOI:10.48550/arXiv.2204.08210.
- [25] **Madsen P.A., Fuhrman D.R., Schäffer H.A.** On the solitary wave paradigm for tsunamis. *Journal of Geophysical Research*. 2008; (113):C12012.
- [26] **Veloso Lima V., Avilez-Valente P., Viana Baptista M.A., Miranda J.M.** Generation of N-waves in laboratory. *Coastal Engineering*. 2019; (148):1–18.
- [27] **Пелиновский Е.Н.** Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН; 1996: 276.
- [28] **Cheng W., Weiss R.** On sediment extent and runup of tsunami waves. *Earth and Planetary Science Letters*. 2013; (362):305–309.
- [29] **Aptosos A., Gelfenbaum G., Jaffe B.** Time-dependent onshore tsunami response. *Coastal Engineering*. 2012; (64):73–86.
- [30] **Chacon-Barrantes S.** Effectiveness of N-waves for predicting morphological changes due to tsunamis. *Applied Ocean Research*. 2018; (74):217–226.
- [31] **Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н., Диденкулов О.И.** Накат длинных уединенных волн различной поляризации на плоский откос. *Известия РАН, физика атмосферы и океана*. 2014; 50(5):604–611.
- [32] **Madsen P.A., Schäffer H.A.** Analytical solutions for tsunami runup on a plane beach: single waves, N-waves and transient waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 2010; (645):27–57.
- [33] **Khakimzyanov G., Dutykh D.** Numerical modelling of surface water wave interaction with a moving wall. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(5):1289–1354.
- [34] **Палагина А.А., Хакимзянов Г.С.** О численном моделировании поверхностных волн в бассейне с подвижными непроницаемыми границами. *Вычислительные технологии*. 2019; 24(4):70–107. DOI:10.25743/ICT.2019.24.4.006.

- [35] **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Mitsotakis D.** Dispersive shallow water wave modelling. Part I: model derivation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):1–29.
- [36] **Диденкулова И.И., Заибо Н., Куркин А.А., Левин Б.В., Пелиновский Е.Н., Соомере Т.** Накат нелинейно деформированных волн на берег. *Доклады Академии наук*. 2006; 410(5):676–678.
- [37] **Родин А.А., Пелиновский Е.Н.** Динамика длинных волн в прибрежной зоне моря с учетом эффектов обрушения. Н. Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-тет им. Р.Е. Алексеева; 2014: 93.
- [38] **Sun J.L., Wang C.Z., Wu G.X., Khoo B.C.** Fully nonlinear simulations of interactions between solitary waves and structures based on the finite element method. *Ocean Engineering*. 2015; (108):202–215.
- [39] **Гусев О.И., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Дутых Д.** Оценки влияния частотной дисперсии на характеристики взаимодействия уединенных волн с плоским береговым склоном. *Прикладная механика и техническая физика*. 2021; 62(4):114–123.
- [40] **Chubarov L.B., Kikhtenko V.A., Lander A.V., Gusev O.I., Beisel S.A., Pinegina T.K.** Technique of local probabilistic tsunami zonation for near-field seismic sources applied to the Bechevinskaya Cove (the Kamchatka Peninsula). *Natural Hazards*. 2022; 110(1):373–406.
- [41] **Su C.H., Mirie R.M.** On head-on collisions between two solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1980; 98(3):509–525.
- [42] **Chen Y.Y., Li Y.-J., Hsu H.C., Hwung H.H.** The pressure distribution beneath a solitary wave reflecting on a vertical wall. *European Journal of Mechanics / B Fluids*. 2019; (76):66–72.
- [43] **Загрядская Н.Н., Иванова С.В., Нуднер Л.С., Шошин А.И.** Воздействие длинных волн на вертикальную преграду. *Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева*. 1980; (138):94–101.
- [44] **Uneyama M.** Experimental study of head-on and rear-end collisions of two unequal solitary waves. *Ocean Engineering*. 2017; (137):174–192.
- [45] **Железняк М.И.** Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды. Накат цунами на берег: Сб. научн. тр. Горький: ИПФ АН СССР; 1985: 122–140.
- [46] **Chambarel J., Kharif C., Touboul J.** Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation. *Nonlinear Processes Geophysics*. 2009; (16):111–122.
- [47] **Cooker M.J., Weidman P.D., Bale D.S.** Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall. *Journal of Fluid Mechanics*. 1997; (342):141–158.
- [48] **Khakimzyanov G., Dutykh D., Gusev O., Shokina N.** Dispersive shallow water wave modelling. Part II: numerical simulation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):30–92.
- [49] **Paprota M., Staroszczyk R., Sulisz W.** Eulerian and Lagrangian modelling of a solitary wave attack on a seawall. *Journal of Hydro-Environment Research*. 2018; (19):189–197.
- [50] **Maxworthy T.** Experiments on collisions between solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976; 76(1):177–185.
- [51] **Lu X., Wang K.-H.** Modeling a solitary wave interaction with a fixed floating body using an integrated analytical–numerical approach. *Ocean Engineering*. 2015; (109):691–704.
- [52] **Park J.-C., Kim M.-H., Miyata H.** Three-dimensional numerical wave tank simulations on fully nonlinear wave–current–body interactions. *Journal of Marine Science and Technology*. 2001; 6(2):70–82.
-

## MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.004

**Force impact of long surface waves on a body semi-immersed in water. I. Influence of the waveform**GUSEV OLEG I.<sup>1</sup>, SKIBA VASSILY S.<sup>1,2</sup>, KHAKIMZYANOV GAYAZ S.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia<sup>2</sup>Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Khakimzyanov Gayaz S., e-mail: khak@ict.nsc.ru

Received May 04, 2022, revised June 02, 2022, accepted June 10, 2022.

**Abstract**

*Purpose.* Designing and operating semi-submerged fixed coastal structures requires taking into account the force effect of surface waves on them. This is especially true for those areas where such structures are located, where catastrophic tsunami waves are possible. In almost all research addressed the numerical study of the interaction of long surface waves with semi-submerged structures, a solitary wave was considered as an incoming wave. The purpose of this paper was to compare the effect of incident waves of different shapes.

*Methods.* In the present work, a numerical algorithm based on a mathematical model of two-dimensional potential flows of an ideal fluid with a free boundary is employed to calculate the interaction of waves of various shapes with semi-immersed fixed structures. This model is one element of the hierarchy of hydrodynamic models and it can be considered as a “reference” model for problems in which fluid can be considered as ideal. It can be used to validate the shallow water models of the first and second long-wave approximations. The finite-difference equations and numerical algorithm are based on the curvilinear grids adapting to the free surface and taking into account irregularities of the body and basin bottoms.

*Results.* We determine the dependencies of the maximum runup and wave force on the shape of incoming wave for the simplified formulation for vertical sides of a structure and horizontal bottoms of the structure and basin. The comparisons were made for the solitary and single waves, as well as for the leading-elevation and depression isosceles of  $N$ -waves. The calculations were performed for different values of the incident wave amplitude, depth, and body length. Differences in the patterns of interaction with the body of long waves of different types are revealed.

*Conclusions.* For  $N$ -waves with a leading depression part, the maxima of runup on the face of the body are significantly greater than that for waves with other shapes. The impacts of the solitary and single waves on semi-immersed structures are similar. The wave that passed behind the body has smaller amplitude than the incoming wave, but maintains its shape for all wave types. As submergence and length of the body increases, the maximum run-up on the front face of the body and the horizontal component of the hydrodynamic force also increases, while the runup on the back face decreases. For greater body submergences, the horizontal force component approaches the impact of waves on a fixed vertical wall. In contrast to the solitary and solitary wave cases, the chronograms of the horizontal and vertical force components for  $N$ -waves with the leading depression part contain an area with a two-peak configuration even at relatively small amplitudes.

*Keywords:* solitary wave, single wave,  $N$ -wave, partially immersed structure, wave force, potential flow model, movable grid, calculation results.

*Citation:* Gusev O.I., Skiba V.S., Khakimzyanov G.S. Force impact of long surface waves on a body semi-immersed in water. I. Influence of the waveform. Computational Technologies. 2022; 27(4):33–62. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.004. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for FRC ICT, the results of sections 2 and 3.1 were obtained within the Russian Scientific Foundation grant (project No. 21-71-00127).

### References

1. **Fang Q., Guo A.** Analytical and experimental study of focused wave action on a partially immersed box. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019: Article ID 9850302. DOI:10.1155/2019/9850302.
2. **Zheng S., Zhang Y.** Wave diffraction from a truncated cylinder in front of a vertical wall. *Ocean Engineering*. 2015; (104):329–343.
3. **Dorfman A.A., Pechenin S.A., Semenov K.K., Nudner I.S., Maximov V.V.** Tsunami wave impact on marine hydrotechnical structures and coastal objects. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2017; 10(4):16–30. (In Russ.)
4. **Lloyd T.O., Rossetto T.** A comparison between existing tsunami load guidance and large-scale experiments with long-waves. *Proceedings of 15th World Conference on Earthquake Engineering (15WCEE)*. 2012; (8):6412–6421.
5. **Yeh H., Barbosa A.R., Ko H., Cawley J.G.** Tsunami loadings on structures: review and analysis. *Coastal Engineering Proceedings*. 2014; 1(34):Paper 4.
6. **Kamynin E.Yu., Maximov V.V., Nudner I.S., Semenov K.K., Khakimzyanov G.S.** Study of interaction of the solitary wave with a partially submerged stationary construction. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2010; 4(10):39–54. (In Russ.)
7. **Nudner I.S., Semenov K.K., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu.** Investigations of the long marine waves interaction with the structures protected by the vertical barriers. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2017; 10(4):31–43. (In Russ.)
8. **Chen Y.-H., Wang K.-H.** Experiments and computations of solitary wave interaction with fixed, partially submerged, vertical cylinders. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2019; 5(2):189–204.
9. **Hadzic I., Hennig J., Peric M., Xing-Kaeding Y.** Computation of flow induced motion of floating bodies. *Applied Mathematical Modelling*. 2005; 29(12):1196–1210.
10. **Nudner I.S., Semenov K.K., Lebedev V.V., Khakimzyanov G.S., Zakharov Yu.N.** Numerical model of the hydrowave laboratory for studying the interaction of sea waves with hydrotechnical structures. *Computational Technologies*. 2019; 24(1):86–105. DOI:10.25743/ICT.2019.24.1.007. (In Russ.)
11. **Isaacson M.** Nonlinear-wave effects on fixed and floating bodies. *Journal of Fluid Mechanics*. 1982; (120):267–281.
12. **Khakimzyanov G.S.** Numerical simulation of the interaction of a solitary wave with a partially immersed body. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2002; 17(2):145–158.
13. **Zhao M., Cheng L., Teng B.** Numerical simulation of solitary wave scattering by a circular cylinder array. *Ocean Engineering*. 2007; 34(3–4):489–499.
14. **Zhou B.Z., Wu G.X., Meng Q.C.** Interactions of fully nonlinear solitary wave with a freely floating vertical cylinder. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016; (96):119–131.
15. **Afanasiev K.E., Berezin E.N.** Analysis of dynamic characteristics in case of interaction of a solitary wave with an obstacle. *Computational Technologies*. 2004; 9(3):22–38. (In Russ.)
16. **Yan S., Ma Q.W.** Numerical simulation of fully nonlinear interaction between steep waves and 2D floating bodies using the QALE-FEM method. *Journal of Computational Physics*. 2007; (221):666–692.
17. **Chang C.-H.** Study of a solitary wave interacting with a surface piercing square cylinder using a three-dimensional fully nonlinear model with grid-refinement technique on surface layers. *Journal of Marine Engineering & Technology*. 2017; 16(1):22–36.
18. **Lin P.** A multiple-layer  $\sigma$ -coordinate model for simulation of wave–structure interaction. *Computers & Fluids*. 2006; 35(2):147–167.
19. **Orzech M.D., Shi F., Veeramony J., Bateman S., Cal A.J., Kirby J.T.** Incorporating floating surface objects into a fully dispersive surface wave model. *Ocean Modelling*. 2016; (102):14–26.
20. **Tadepalli S., Synolakis C.E.** The run-up of N-waves on sloping beaches. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*. 1994; (445):99–112.

21. **Khakimzyanov G.S., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part I: Mathematical models. *Communications in Computational Physics*. 2020; 27(2):321–378.
22. **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: long waves over a flat bottom. *Ocean Engineering*. 2021; (221):Article 108540.
23. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. *Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing*. Basel: Birkhauser; 2020: 284.
24. **Khakimzyanov G.S., Dutykh D., Gusev O.I.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part II: Numerical results. arXiv:2204.08210v1. 2022. DOI:10.48550/arXiv.2204.08210.
25. **Madsen P.A., Fuhrman D.R., Schäffer H.A.** On the solitary wave paradigm for tsunamis. *Journal of Geophysical Research*. 2008; (113):C12012.
26. **Veloso Lima V., Avilez-Valente P., Viana Baptista M.A., Miranda J.M.** Generation of N-waves in laboratory. *Coastal Engineering*. 2019; (148):1–18.
27. **Pelinovsky E.N.** *Gidrodinamika voln tsunami [Hydrodynamics of tsunami waves]*. Nizhny Novgorod: IPF RAN; 1996: 276. (In Russ.)
28. **Cheng W., Weiss R.** On sediment extent and runup of tsunami waves. *Earth and Planetary Science Letters*. 2013; (362):305–309.
29. **Apotsos A., Gelfenbaum G., Jaffe B.** Time-dependent onshore tsunami response. *Coastal Engineering*. 2012; (64):73–86.
30. **Chacon-Barrantes S.** Effectiveness of N-waves for predicting morphological changes due to tsunamis. *Applied Ocean Research*. 2018; (74):217–226.
31. **Didenkulova I.I., Pelinovsky E.N., Didenkulov O.I.** Run-up of long solitary waves of different polarities on a plane beach. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2014; 50(5):532–538.
32. **Madsen P.A., Schäffer H.A.** Analytical solutions for tsunami runup on a plane beach: single waves, N-waves and transient waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 2010; (645):27–57.
33. **Khakimzyanov G., Dutykh D.** Numerical modelling of surface water wave interaction with a moving wall. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(5):1289–1354.
34. **Palagina A.A., Khakimzyanov G.S.** Numerical simulation of surface waves in a basin with moving impermeable boundaries. *Computational Technologies*. 2019; 24(4):70–107. DOI:10.25743/ICT.2019.24.4.006. (In Russ.)
35. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Mitsotakis D.** Dispersive shallow water wave modelling. Part I: model derivation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):1–29.
36. **Didenkulova I.I., Zahibo N., Kurkin A.A., Levin B.V., Pelinovsky E.N., Soomere T.** Runup of nonlinearly deformed waves on a coast. *Doklady Earth Sciences*. 2006; 411(8):1241–1243.
37. **Rodin A.A., Pelinovsky E.N.** *Dinamika dlinnykh voln v pribrezhnoy zone morya s uchetom effektiv obrusheniya [Dynamics of long waves in the marine coastal zone, taking into account effects of wave breaking]*. Nizhny Novgorod: Nizhegorodskiy Gosudarstvennyy Tekhnicheskiy Universitet im. R.E. Alekseeva; 2014: 93. (In Russ.)
38. **Sun J.L., Wang C.Z., Wu G.X., Khoo B.C.** Fully nonlinear simulations of interactions between solitary waves and structures based on the finite element method. *Ocean Engineering*. 2015; (108):202–215.
39. **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., Dutykh D.** Assessing the frequency dispersion influence on the solitary-wave interaction with a constant sloping beach. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021; 62(4):624–632.
40. **Chubarov L.B., Kikhtenko V.A., Lander A.V., Gusev O.I., Beisel S.A., Pinegina T.K.** Technique of local probabilistic tsunami zonation for near-field seismic sources applied to the Bechevinskaya Cove (the Kamchatka Peninsula). *Natural Hazards*. 2022; 110(1):373–406.
41. **Su C.H., Mirie R.M.** On head-on collisions between two solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1980; 98(3):509–525.
42. **Chen Y.Y., Li Y.-J., Hsu H.C., Hwung H.H.** The pressure distribution beneath a solitary wave reflecting on a vertical wall. *European Journal of Mechanics / B Fluids*. 2019; (76):66–72.
43. **Zagryadskaya N.N., Ivanova S.V., Nudner L.S., Shoshin A.I.** Action of long waves on a vertical obstacle. *Bulletin of VNIIG*. 1980; (138):94–101. (In Russ.)

44. **Umeyama M.** Experimental study of head-on and rear-end collisions of two unequal solitary waves. *Ocean Engineering*. 2017; (137):174–192.
45. **Zheleznyak M.I.** Vozdeystvie dlinnykh voln na sploshnye vertikal'nye pregrady. Nakat tsunami na bereg [Influence of long waves on vertical obstacles. Tsunami climbing a beach: Collection of scientific papers]. Gorky: IPF AN SSSR; 1985: 122–140. (In Russ.)
46. **Chambarel J., Kharif C., Touboul J.** Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation. *Nonlinear Processes Geophysics*. 2009; (16):111–122.
47. **Cooker M.J., Weidman P.D., Bale D.S.** Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall. *Journal of Fluid Mechanics*. 1997; (342):141–158.
48. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Gusev O., Shokina N.** Dispersive shallow water wave modelling. Part II: numerical simulation on a globally flat space. *Communications in Computational Physics*. 2018; 23(1):30–92.
49. **Paprotka M., Staroszczyk R., Sulisz W.** Eulerian and Lagrangian modelling of a solitary wave attack on a seawall. *Journal of Hydro-Environment Research*. 2018; (19):189–197.
50. **Maxworthy T.** Experiments on collisions between solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976; 76(1):177–185.
51. **Lu X., Wang K.-H.** Modeling a solitary wave interaction with a fixed floating body using an integrated analytical–numerical approach. *Ocean Engineering*. 2015; (109):691–704.
52. **Park J.-C., Kim M.-H., Miyata H.** Three-dimensional numerical wave tank simulations on fully nonlinear wave–current–body interactions. *Journal of Marine Science and Technology*. 2001; 6(2):70–82.